# 楕円関数論 (21)
# 保型形式 (3)：Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2021 年 3 月 8 日（月）

# 復習と今回の内容

復習 重さ $2k$ の保型形式 $f(\tau)$

- 上半平面 $\mathbb{H} = \{\, \mathrm{Im}\,\tau > 0 \,\}$ 上で正則関数である.
- $f\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k} f(\tau) \quad \left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = SL(2,\mathbb{Z})\right).$
- $\tau = \mathrm{i}\infty$ で正則である.
- （例）Eisenstein 級数

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}} \quad (\, k = 2, 3, \dots\,).$$

# 復習と今回の内容

**復習** 重さ $2k$ の保型形式 $f(\tau)$

- 上半平面 $\mathbb{H} = \{\, \mathrm{Im}\,\tau > 0 \,\}$ 上で正則関数である．
- $f\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k} f(\tau) \quad \left(\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = SL(2,\mathbb{Z})\right).$
- $\tau = \mathrm{i}\infty$ で正則である．
- （例）Eisenstein 級数

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}} \quad (\, k = 2, 3, \ldots\,).$$

**今回の内容** Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$

$$E_2(\tau) = \frac{3}{\pi^2} \sum_{m,n}{}'' \frac{1}{(m\tau+n)^2}.$$

絶対収束しないゆえに保型形式でないが，興味深い性質を持つ．

# （復習）無限級数と絶対収束

無限級数の値の定義：部分和の極限

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

書かれた順に足すのが基本.

# （復習）無限級数と絶対収束

無限級数の値の定義：部分和の極限

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

書かれた順に足すのが基本.

それを守らないと…

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \quad \text{（これは収束しない）.}$$

$$S = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0,$$

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1,$$

$S$ の値が一通りに定まらない !?

# （復習）無限級数と絶対収束

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する} \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する} \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

絶対収束する級数は和の順序を変えてもよい（同じ値に収束する）.

# （復習）無限級数と絶対収束

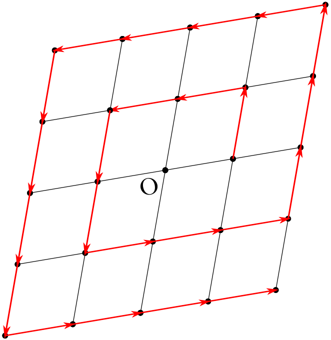
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は絶対収束する} \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

絶対収束する級数は和の順序を変えてもよい（同じ値に収束する）.

Weierstrass の $\wp$ 関数

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left( \frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

本来なら格子点 $\omega$ の和の順序を明示しなければならない.
和は絶対収束するので，和の順序はあやふやにしていた.



# Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$

**Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$**

$$E_2(\tau) := \frac{3}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{1}{(m\tau+n)^2} \quad (\operatorname{Im}\tau > 0),$$

和は $m=0$ のとき $n \neq 0$ についてとる．

級数は絶対収束しないので，和の順序は守らねばならない（二重級数の和の順序交換はできない）．

$$E_2(\tau) = \frac{3}{\pi^2}\left\{ \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau+n)^2} \right\}$$

$$= 1 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau+n)^2}.$$

# Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$

通常の Eisenstein 級数

$$G_{2k}(\tau) := \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}} \quad (\operatorname{Im}\tau > 0;\ k = 2, 3, \dots).$$

$G_{2k}(\tau)$ は重さ $2k$ の保型形式である，i.e.,

$$\tau^{-2k} G_{2k}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = G_{2k}(\tau).$$

これは級数が絶対収束するから成立する.

# Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$

通常の Eisenstein 級数

$$G_{2k}(\tau) := \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}} \quad (\operatorname{Im}\tau > 0;\ k = 2, 3, \dots).$$

$G_{2k}(\tau)$ は重さ $2k$ の保型形式である，i.e.,

$$\tau^{-2k} G_{2k}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = G_{2k}(\tau).$$

これは級数が絶対収束するから成立する．一方，$E_2(\tau)$ については…

**定理 1**

$$\tau^{-2k} E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_2(\tau) + \frac{6}{\mathrm{i}\pi\tau}.$$

# Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$：定理 1 の証明 (1/6)

まず，通常の Eisenstein 級数 $G_{2k}(\tau)$ $(k=2,3,\dots)$ が重さ $2k$ の保型形式の変換則を満たすことを確かめる．

$$
\begin{aligned}
G_{2k}(\tau) &= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^{2k}} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m\tau+n)^{2k}},\\
\tau^{-2k}G_{2k}\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(n\tau)^{2k}} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{-\tau^{-2k}}{(-m/\tau+n)^{2k}}\\
&= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(n\tau)^{2k}} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n\tau+m)^{2k}}
\end{aligned}
$$

（絶対収束により和の順序は交換可能）

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(n\tau)^{2k}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(n\tau+m)^{2k}}\\
&= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(n\tau)^{2k}} + \sum_{m\neq 0}\frac{1}{m^{2k}} + \sum_{n\neq 0}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(n\tau+m)^{2k}}\\
&= \sum_{m\neq 0}\frac{1}{m^{2k}} + \sum_{n\neq 0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n\tau+m)^{2k}} = G_{2k}(\tau).
\end{aligned}
$$

# Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$：定理 1 の証明 (2/6)

次に，$E_2(\tau)$ の場合どうなるか確かめる．次の関数を導入する．

$$G_2(\tau) := \frac{\pi^2}{3} E_2(\tau) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau + n)^2},$$

次に，$E_2(\tau)$ の場合どうなるか確かめる．次の関数を導入する．

$$G_2(\tau) := \frac{\pi^2}{3}E_2(\tau) = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m\tau+n)^2},$$

$$\begin{aligned}
\tau^{-2}G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(n\tau)^2} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\tau^{-2}}{(-m/\tau+n)^2}\\
&= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(n\tau)^2} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n\tau+m)^2}
\end{aligned}$$

（二重級数の和の順序交換はできない）

$$= \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(n\tau)^2} + \sum_{m\neq 0}\frac{1}{m^2} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(n\tau+m)^2}$$

（青字の項をまとめて），

$$\tau^{-2}G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(m\tau+n)^2}.$$

# Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$：定理 1 の証明 (3/6)

$$G_2(\tau) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau+n)^2},$$

右辺の二重級数の和の順序をひっくり返したい．そこで，次の関数を定義する．

$$\widetilde{G}_2(\tau) := \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{mn}(\tau) \right\},$$

$$a_{mn}(\tau) := \frac{1}{(m\tau+n-1)(m\tau+n)} = \frac{1}{m\tau+n-1} - \frac{1}{m\tau+n}.$$

$$G_2(\tau) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau + n)^2},$$

右辺の二重級数の和の順序をひっくり返したい．そこで，次の関数を定義する．

$$\widetilde{G}_2(\tau) := \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m\tau + n)^2} - a_{mn}(\tau) \right\},$$

$$a_{mn}(\tau) := \frac{1}{(m\tau + n - 1)(m\tau + n)} = \frac{1}{m\tau + n - 1} - \frac{1}{m\tau + n}.$$

次式により $\widetilde{G}_2(\tau)$ の二重級数は絶対収束する．

$$\frac{1}{(m\tau + n)^2} - a_{mn}(\tau) = \frac{-1}{(m\tau + n)^2 (m\tau + n - 1)} \sim \frac{-1}{(m\tau + n)^3}.$$

そして，二重級数の内側の $n$ についての和は次のようになる．

$$\sum_{n=-\infty} \left\{ \frac{1}{(m\tau + n)^2} - a_{mn}(\tau) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau + n)^2} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{m\tau + n} - \frac{1}{m\tau + n - 1} \right)}_{0},$$

$$G_2(\tau) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau+n)^2},$$

右辺の二重級数の和の順序をひっくり返したい．そこで，次の関数を定義する．

$$\widetilde{G}_2(\tau) := \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{mn}(\tau) \right\},$$

$$a_{mn}(\tau) := \frac{1}{(m\tau+n-1)(m\tau+n)} = \frac{1}{m\tau+n-1} - \frac{1}{m\tau+n}.$$

次式により $\widetilde{G}_2(\tau)$ の二重級数は絶対収束する．

$$\frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{mn}(\tau) = \frac{-1}{(m\tau+n)^2(m\tau+n-1)} \sim \frac{-1}{(m\tau+n)^3}.$$

そして，二重級数の内側の $n$ についての和は次のようになる．

$$\sum_{n=-\infty} \left\{ \frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{mn}(\tau) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau+n)^2} - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{m\tau+n} - \frac{1}{m\tau+n-1} \right)}_{0},$$

$$\therefore \quad \widetilde{G}_2(\tau) = G_2(\tau).$$

# Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$：定理 1 の証明 (4/6)

$G_2(\tau)$ が絶対収束する二重級数で表された.

$$G_2(\tau) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m\tau + n)^2} - a_{mn}(\tau) \right\},$$

$G_2(\tau)$ が絶対収束する二重級数で表された．

$$G_2(\tau) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{mn}(\tau) \right\},$$

$G_2(\tau)$ を変形してみる．二重級数が絶対収束→和の順序交換可能を用いて，

$$\begin{aligned} G_2(\tau) &= \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} \left\{ \frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{mn}(\tau) \right\} \\ &= \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} \frac{1}{(m\tau+n)^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} a_{mn}(\tau) \end{aligned}$$

前々頁の計算より

$$= \tau^{-2} G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} a_{mn}(\tau),$$

$G_2(\tau)$ が絶対収束する二重級数で表された．

$$G_2(\tau) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{mn}(\tau) \right\},$$

$G_2(\tau)$ を変形してみる．二重級数が絶対収束→和の順序交換可能を用いて，

$$\begin{aligned} G_2(\tau) &= \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} \left\{ \frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{mn}(\tau) \right\} \\ &= \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} \frac{1}{(m\tau+n)^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} a_{mn}(\tau) \end{aligned}$$

前々頁の計算より

$$= \tau^{-2} G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} a_{mn}(\tau),$$

$$\therefore \quad G_2(\tau) = \tau^{-2} G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} a_{mn}(\tau)$$

右辺の二重級数を計算すればよい．

二重級数 $\sum a_{mn}(\tau)$ の計算.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m \neq 0} a_{mn}(\tau) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N+1}^{N} \sum_{m \neq 0} a_{mn}(\tau) \overset{*}{=} \lim_{N \to \infty} \sum_{m \neq 0} \sum_{n=-N+1}^{N} a_{mn}(\tau),$$

（$*$ について後述あり.）

二重級数 $\sum a_{mn}(\tau)$ の計算.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0} a_{mn}(\tau) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N+1}^{N}\sum_{m\neq 0} a_{mn}(\tau) \overset{*}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_{m\neq 0}\sum_{n=-N+1}^{N} a_{mn}(\tau),$$

（$*$ について後述あり.）二重級数の内側の $n$ についての和を求める.

$$\sum_{n=-N+1}^{N} a_{mn}(\tau) = -\sum_{n=-N+1}^{N}\left(\frac{1}{m\tau+n}-\frac{1}{m\tau+n-1}\right) = \frac{1}{m\tau-N}-\frac{1}{m\tau+N},$$

二重級数を求める. cot の無限分数展開を用いて,

$$\begin{aligned}\sum_{m\neq 0}\sum_{n=-N+1}^{N} a_{mn}(\tau) &= \sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{m\tau-N}-\frac{1}{m\tau+N}\right)\\ &= \frac{2}{\tau}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{-N/\tau+m}+\frac{1}{-N/\tau+m}\right)\\ &= \frac{2\pi}{\tau}\cot\left(-\frac{\pi N}{\tau}\right)+\frac{2}{N},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0} a_{mn}(\tau) = \frac{2\pi}{\tau}\lim_{N\to\infty}\cot\left(-\frac{\pi N}{\tau}\right) = \frac{2\pi \mathrm{i}}{\tau}\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2N\pi\mathrm{i}/\tau}+1}{\mathrm{e}^{-2N\pi\mathrm{i}/\tau}-1} = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{\tau}.$$

$$\therefore \quad \tau^{-2} G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = G_2(\tau) - \frac{2\pi \mathrm{i}}{\tau}, \quad \tau^{-2} E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_2(\tau) + \frac{6}{\mathrm{i}\pi\tau}.$$

■

$$\therefore \quad \tau^{-2} G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = G_2(\tau) - \frac{2\pi \mathrm{i}}{\tau}, \quad \tau^{-2} E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_2(\tau) + \frac{6}{\mathrm{i}\pi\tau}.$$

$\blacksquare$

$*$ 若干気になること．前頁の計算

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N+1}^{N} \sum_{m\neq 0} a_{mn}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-N+1}^{N} a_{mn}(\tau),$$

$$a_{mn}(\tau) = \frac{1}{(m\tau + n - 1)(m\tau + n)},$$

保型形式論の教科書では，$\sum a_{mn}(\tau)$ が絶対収束であることを示し，その上で二重和の順序交換が可能としている．

しかし，有限和と無限和の順序交換はいつでも可能ではないか？

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{は収束する} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n).$$

# $E_2(\tau)$ の Fourier 級数展開

$$E_2(\tau) = 1 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{m \neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau + n)^2}.$$

「補遺」の公式を用いて，

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n q^{mn} \quad (\, q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau} \,). \tag{1}$$

**$E_2(\tau)$ の Fourier 級数展開**

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \quad (\, q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau} \,), \tag{2}$$

$$\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d \quad (\, d|n \ : \ d \text{ は } n \text{ を割り切る} \,)$$

$*$ (1) $\Rightarrow$ (2) で「二重級数の絶対収束→和の順序を変えられる」を用いている．

# 楕円関数論との関連

Weierstass の楕円関数論で次の数が現れた.

$$\eta_j = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \quad (\, j = 1, 2 \,),$$

ここで, $\zeta(u)$ は Weierstrass の zeta 関数である.

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{\,0\,\}} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right),$$

$$\Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\} \quad \text{周期格子（基底 } \omega_1, \omega_2\text{）}.$$

$$\zeta(u) \text{ の擬周期性：} \quad \zeta(u + \omega_j) = \zeta(u) + \eta_j \quad (\, j = 1, 2 \,).$$

# 楕円関数論との関連

Weierstass の楕円関数論で次の数が現れた．

$$\eta_j = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \quad (\, j = 1, 2\,),$$

ここで，$\zeta(u)$ は Weierstrass の zeta 関数である．

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{\,0\,\}} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right),$$

$$\Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\} \quad \text{周期格子（基底 } \omega_1, \omega_2 \text{）}.$$

$$\zeta(u) \text{ の擬周期性：} \quad \zeta(u + \omega_j) = \zeta(u) + \eta_j \quad (\, j = 1, 2\,).$$

$\eta_1$ について次式が成り立つ（動画「楕円関数論 (10)」）．

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 \left\{1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n\right\} \quad (\, q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}\,).$$

# 楕円関数論との関連

Weierstass の楕円関数論で次の数が現れた．

$$\eta_j = 2\zeta\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \quad (\, j = 1, 2\,),$$

ここで，$\zeta(u)$ は Weierstrass の zeta 関数である．

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega \in \Lambda - \{\,0\,\}} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2}\right),$$

$$\Lambda = \{\, m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\,\} \quad \text{周期格子（基底 } \omega_1, \omega_2\text{）}.$$

$$\zeta(u) \text{ の擬周期性：} \quad \zeta(u + \omega_j) = \zeta(u) + \eta_j \quad (\, j = 1, 2\,).$$

$\eta_1$ について次式が成り立つ（動画「楕円関数論 (10)」）．

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 \left\{1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n\right\} \quad (\, q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\,).$$

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 E_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

# 楕円関数論との関連

変換 $\tau \to \tau' = -\dfrac{1}{\tau}$ $\quad\longleftrightarrow\quad$ 格子 $\Lambda$ の基底の入換 $(\omega_1, \omega_2) \to (\omega_2, -\omega_1)$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 E_2\left(-\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \quad \frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 E_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

これと定理 1

$$\tau^{-2} E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_2(\tau) + \frac{6}{\mathrm{i}\pi\tau}$$

より,

# 楕円関数論との関連

変換 $\tau \to \tau' = -\dfrac{1}{\tau}$ $\longleftrightarrow$ 格子 $\Lambda$ の基底の入換 $(\omega_1, \omega_2) \to (\omega_2, -\omega_1)$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 E_2\left(-\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \quad \frac{\eta_1}{\omega_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 E_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

これと定理 1

$$\tau^{-2} E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_2(\tau) + \frac{6}{\mathrm{i}\pi\tau}$$

より,

Legendre の関係式が再現された！

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi\mathrm{i}.$$

# Dedekind の $\eta$ 関数

**Dedekind の $\eta$ 関数**

$$\eta(\tau) := q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \quad (\, q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\,).$$

- $\eta(\tau)$ は上半平面 $\mathbb{H}$ で正則関数である.
- $\displaystyle\lim_{\tau\to\mathrm{i}\infty}\eta(\tau) = 0.$

# Dedekind の $\eta$ 関数

**Dedekind の $\eta$ 関数**

$$\eta(\tau) := q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \quad (\, q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\,).$$

- $\eta(\tau)$ は上半平面 $\mathbb{H}$ で正則関数である.
- $\displaystyle\lim_{\tau\to\mathrm{i}\infty}\eta(\tau) = 0.$

**定理 2**

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\,\eta(\tau) \quad (\,\tau\in\mathbb{H}\,),$$

$\sqrt{\cdot}$ : 正の実軸上で実数値を取る分枝.

# Dedekind の $\eta$ 関数：定理 2 の証明

（証明）題意の等式の両辺の対数微分が等しい，i.e.,

$$\frac{1}{\tau^2}\frac{\eta'(-1/\tau)}{\eta(-1/\tau)} = \frac{1}{2\tau} + \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} \tag{3}$$

と仮定すると，

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = C\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\eta(\tau) \quad (\ C\ :\ \text{const.}\ ).$$

$\tau = \mathrm{i}$ とおいて $C = 1$ を得る．よって，(3) を示せばよい．$\eta(\tau)$ の定義より，

$$\log\eta(\tau) = \frac{\mathrm{i}\pi\tau}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\log(1-\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\tau}),$$

$$\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} = \frac{\mathrm{i}\pi}{12} - 2\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\tau}}{1-\mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}\tau}} = \frac{\mathrm{i}\pi}{12}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right) = \frac{\mathrm{i}\pi}{12}E_2(\tau).$$

定理 1 を用いれば，(3) の成立がわかる． ■

# Dedekind の $\eta$ 関数

定理 2 の等式の両辺を 24 乗して，

$$\eta^{24}\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\tau^{12}\eta^{24}(\tau).$$

$\therefore\quad \eta^{24}(\tau)$ は重さ 12 の尖点形式である．動画「楕円関数論 (20)」より，

$$\eta^{24}(\tau)=C\Delta(\tau)\quad (\,C\ :\ \mathrm{const.}\,).$$

$$\eta^{24}(\tau)=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=q+\cdots,$$

$$\Delta(\tau)=\frac{(2\pi)^{12}}{12^3}\left\{E_4^3(\tau)-E_6^2(\tau)\right\}=(2\pi)^{12}q+\cdots,$$

$$\therefore\quad C=(2\pi)^{-12}.$$

定理 2 の等式の両辺を 24 乗して，

$$\eta^{24}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{12}\eta^{24}(\tau).$$

$\therefore\quad \eta^{24}(\tau)$ は重さ 12 の尖点形式である．動画「楕円関数論 (20)」より，

$$\eta^{24}(\tau) = C\Delta(\tau) \quad (\, C \ :\ \text{const.}\,).$$

$$\eta^{24}(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = q + \cdots\,,$$

$$\Delta(\tau) = \frac{(2\pi)^{12}}{12^3}\left\{E_4^3(\tau) - E_6^2(\tau)\right\} = (2\pi)^{12}q + \cdots\,,$$

$$\therefore\quad C = (2\pi)^{-12}.$$

楕円関数論で得られた結果が再び得られた！

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \quad (\, q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\,).$$

# まとめ

- Eisenstein 級数 $E_2(\tau)$

$$E_2(\tau) = \frac{3}{\pi^2}\sum_{m\neq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'' \frac{1}{(m\tau+n)^2}.$$

二重級数は絶対収束しない.

- $E_2(\tau)$ は重さ 2 の保型形式の変換則を満たさない.
- 楕円関数論との関連（$\eta_1$，Legendre の関係式）.
- Dedekind の $\eta$ 関数

$$\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \quad (\, q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\,),$$

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau).$$

# 補遺

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau+n)^2} = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n q^{nm} \quad (\, m>0;\ q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}\,).$$

**証明** 次の等式が出発点である.

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right).$$

左辺を次のように変形する.

$$\pi \cot \pi z = \mathrm{i}\pi + \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-1} = \mathrm{i}\pi - 2\pi\mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}z} \quad (\, \mathrm{Im}\, z > 0\,),$$

$$\therefore \quad \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \mathrm{i}\pi - 2\pi\mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}z} \quad (\, \mathrm{Im}\, z > 0\,).$$

両辺を $z$ について $2k-1$ 回 ( $k = 1, 2, \ldots$ ) 微分して,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^{2k}} = (-1)^k \frac{(2\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} \mathrm{e}^{2n\pi\mathrm{i}z}$$

(左辺は一様収束により項別微分可能である). $z = m\tau$, $k = 1$ と置けばよい. ■