# 楕円関数論 (7)
# テータ関数（Jacobi の虚数変換）

緒方　秀教

電気通信大学　大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

2020 年 12 月 15 日（火）

# 復習

- テータ関数：無限和と無限積による表示.

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi v$$
$$= 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}), \quad \text{etc.}$$
$$(\,\mathrm{Im}\,\tau > 0,\ q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}\,),$$

- Jacobi 楕円関数のテータ関数による表示.

$$\mathrm{sn}(u;k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)} \ \text{etc.} \quad \left(\tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K}\right).$$

$\to$ Jacobi 楕円関数の数値計算.

# 今回のテーマ—Jacobi の虚数変換—

**Jacobi の虚数変換**

母数 $k$ と補母数 $k'(=\sqrt{1-k^2})$（$K=K(k)$ と $K'=K(k')$）を入れ替えたら，テータ関数はどのように変換するか？

数値計算の観点から．

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi v, \text{ etc.} \quad q = \mathrm{e}^{-\pi K'/K}.$$

$k \approx 1$ の場合，$K \approx \infty$，$K' \approx \pi/2$，$q \approx 1$.

→ テータ関数の収束が遅くなる．

$k$ と $k'$ を入れ替えて計算できたら，$q \approx 0$ となって収束が速くなる．

# 今回のテーマ—Jacobi の虚数変換—

もし，$k$ と $k'$ を入れ替えたら⋯

| $k$ | $q=\exp(-\pi K'/K)$ | $q'=\exp(-\pi K/K')$ |
|---|---|---|
| 0.9 | $0.10235\ldots$ | $1.31670\ldots\times 10^{-2}$ |
| 0.9999 | $0.41719\ldots$ | $1.25006\ldots\times 10^{-5}$ |
| $1-10^{-10}$ | $0.67494\ldots$ | $1.25000\ldots\times 10^{-11}$ |

$$\vartheta_1(v|\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi v,\ \text{etc.}\quad (\,q=\mathrm{e}^{-\pi K'/K}\,).$$

もし $k\approx 1$ なら，$k$ と $k'$（$K$ と $K'$）を入れ替えて計算したら，
テータ関数の無限和の収束は極めて速くなる．

# 熱方程式の初期値問題

Jacobi の虚数変換は物理的考察から導出できる．

（参考）戸田盛和：楕円関数入門，日本評論社（2001 年）．

### 熱方程式の初期値問題

$\theta(x,t)$：温度，$D>0$：定数，

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \quad (\,-\infty < x < +\infty,\ t>0\,),$$
$$\theta(x,t=0) = f(x) \quad (\,-\infty < x < +\infty\,).$$

ただし，$f(x)$ は周期関数（周期 $h$）とする：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{2n\pi}{h}x\right) \quad \text{(Fourier 級数)}.$$

# 熱方程式の初期値問題

二通りの解の表示.

- Fourier 級数解.

$$\theta(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n \exp\left(-\frac{4\pi^2 D}{h^2} n^2 t\right) \exp\left(\mathrm{i}\frac{2n\pi}{h} x\right)$$

- 畳込み積解：

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4Dt}\right] f(x')\mathrm{d}x'$$

これは，$f(x)$ が周期関数でなくても成り立つ．

# 熱方程式の初期値問題

とくに，$D = 1/(4\pi)$，$h = 1$，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \quad \text{（周期デルタ関数）}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2n\pi \mathrm{i} x)$$

である場合．

$$\theta(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 t) \exp(2n\pi \mathrm{i} x) \quad \text{（Fourier 級数解）}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi}{t}(x - n)^2\right) \quad \text{（畳込み積解）．}$$

# 熱方程式の初期値問題

Fourier 級数解

$$\theta(x,t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi n^2 t)\cos(2n\pi x) = \vartheta_3(x|\mathrm{i}t).$$

テータ関数が現れる．

一方，畳込み積解を変形すると，

$$\begin{aligned}\theta(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\pi x^2}{t}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{t}\right)\exp\left(\frac{2n\pi x}{t}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\pi x^2}{t}\right)\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{t}\right)\cosh\left(\frac{2n\pi x}{t}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\pi x^2}{t}\right)\vartheta_3\left(\frac{x}{\mathrm{i}t}\middle| -\frac{1}{\mathrm{i}t}\right).\end{aligned}$$

$\tau = \mathrm{i}t$ とおいて，

**$\vartheta_3(v|\tau)$ に対する Jacobi の虚数変換**

$$\vartheta_3(v|\tau) = \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{\tau}\right) \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right).$$

$$\text{テータ関数のパラメータ} \quad \tau \to -\frac{1}{\tau}.$$

Jacobi 楕円関数で言えば,

$$\tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K} \quad \to \quad -\frac{1}{\tau} = \mathrm{i}\frac{K}{K'}.$$

$\therefore$ $k$ と $k'$（$K$ と $K'$）を入れ換える.

このとき，楕円関数・テータ関数がどのように変換するかを示したのが，Jacobi の虚数変換である.

# Jacobi の虚数変換

$\vartheta_1(v|\tau), \vartheta_2(v|\tau), \vartheta_0(v|\tau)$ に対する Jacobi の虚数変換を求める．
それには，次の公式を用いる：

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(v|\tau) &= -\mathrm{i}q^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}\vartheta_3(v+1/2+\tau/2|\tau),\\
\vartheta_2(v|\tau) &= q^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}\vartheta_3(v+\tau/2|\tau),\\
\vartheta_0(v|\tau) &= \vartheta_3(v|\tau).
\end{aligned}$$

（公式の証明）テータ関数の無限積表示を用いる．例えば，

$$\vartheta_2(v|\tau) = q^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n-2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v}),$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v})$$

であるから，$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\vartheta_3(v+\tau/2|\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}v})(1+q^{2n-2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}v})\\
&= q^{-1/4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\vartheta_2(v|\tau).
\end{aligned}$$

（Jacobi の虚数変換の導出）例えば，$\vartheta_2(v|\tau)$ については，

$$\vartheta_2(v|\tau) = q^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}\vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\middle|\,\tau\right)$$

（$\vartheta_3(v|\tau)$ に対する Jacobi の虚数変換を用いて）

$$= \exp\left(\mathrm{i}\pi\left(\frac{\tau}{4}+v\right)\right)\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{\tau}\left(v+\frac{\tau}{2}\right)^2\right)\vartheta_3\left(\frac{v+\tau/2}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{\tau}\right)\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}+\frac{1}{2}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{\tau}\right)\vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\therefore\quad \vartheta_2(v|\tau) = \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{\tau}\right)\vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right).$$

# Jacobi の虚数変換

**Jacobi の虚数変換**

$$\vartheta_1(v|\tau) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{\tau}\right)\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{\tau}\right)\vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{\tau}\right)\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right),$$

$$\vartheta_0(v|\tau) = \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{\tau}\right)\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right).$$

$*$ Jacobi の虚数変換は「数学的」な考察から導出することも可能である．

# Jacobi の虚数変換

$$\mathrm{sn}(u;k) = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u/2K|\tau)}{\vartheta_0(u/2K|\tau)}, \quad \tau = \mathrm{i}\frac{K'}{K}.$$

Jacobi の虚数変換でどのように変換するのか？

$$\begin{aligned}
\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\middle|\tau\right) &= \mathrm{i}\sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\tau}}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{\tau}\left(\frac{u}{2K}\right)^2\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{\tau}\frac{u}{2K}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) \\
&= -\mathrm{i}\sqrt{-\mathrm{i}\tau'}\exp\left(-\frac{\pi u^2}{4KK'}\right)\vartheta_1\left(\frac{\mathrm{i}u}{2K'}\middle|\tau'\right) \quad \left(\tau' = \mathrm{i}\frac{K}{K'}\right),
\end{aligned}$$

$$\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\middle|\tau\right) = \sqrt{-\mathrm{i}\tau'}\exp\left(-\frac{\pi u^2}{4KK'}\right)\vartheta_2\left(\frac{\mathrm{i}u}{2K'}\middle|\tau'\right),$$

$$\vartheta_3(0|\tau) = \sqrt{-\mathrm{i}\tau'}\vartheta_3(0|\tau'), \quad \vartheta_2(0|\tau) = \sqrt{-\mathrm{i}\tau'}\vartheta_0(0|\tau'),$$

# Jacobi の虚数変換

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u;k) &= -\,\mathrm{i}\frac{\vartheta_3(0|\tau')}{\vartheta_0(0|\tau')}\frac{\vartheta_1(\mathrm{i}u/2K'|\tau')}{\vartheta_2(\mathrm{i}u/2K'|\tau')} \\
&= -\,\mathrm{i}\frac{\vartheta_3(0|\tau')/\vartheta_2(0|\tau')}{\vartheta_0(0|\tau')/\vartheta_2(0|\tau')}\frac{\vartheta_1(\mathrm{i}u/2K'|\tau')/\vartheta_0(\mathrm{i}u/2K'|\tau')}{\vartheta_2(\mathrm{i}u/2K'|\tau')/\vartheta_0(\mathrm{i}u/2K'|\tau')} \\
&= -\,\mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}(\mathrm{i}u;k')}{\mathrm{cn}(\mathrm{i}u;k')},
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \mathrm{sn}(u;k) = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}(\mathrm{i}u;k')}{\mathrm{cn}(\mathrm{i}u;k')}.
$$

$u \to \mathrm{i}u$ として，

$$
\mathrm{sn}(\mathrm{i}u;k) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}(u;k')}{\mathrm{cn}(u;k')}.
$$

同様にして，

$$
\mathrm{cn}(\mathrm{i}u;k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(u;k')}, \quad \mathrm{dn}(\mathrm{i}u;k) = \frac{\mathrm{dn}(u;k')}{\mathrm{cn}(u;k')}.
$$

純虚数の変数に対する Jacobi 楕円関数 sn, cn, dn の公式を再現する．

# まとめ

- 母数 $k$ と補母数 $k'$（$K$ と $K'$）を入れ替えると，テータ関数はどのように変換されるだろうか？

  もしそれがわかれば，Jacobi 楕円関数の計算に必要なテータ関数の計算が楽になる．

- Jacobi の虚数変換．

  ∗ 熱方程式の初期値問題から導出できる．

- 純虚数の変数に対する Jacobi 楕円関数の公式が再現される．