数値計算・講義資料—直交多項式—

（担当）緒方秀教　(e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2018 年 12 月 11 日（火）

主な直交多項式に関してその性質等を列挙する．詳細は [1, 2] などの数学公式集を参照すること．なお，直交多項式の定義は書籍によって異なることがあるので，注意すること．

Legendre の多項式

定義　$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$

直交関係式　$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}\cdot\frac{2}{2n+1}.$

具体形　$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1),$

$P_3(x)=\dfrac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\dfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$

漸化式　$nP_n(x)-(2n-1)xP_{n-1}(x)+(n-1)P_{n-2}(x)=0,$

$(x^2-1)P_n'(x) = n\{xP_n(x)-P_{n-1}(x)\} = (n+1)\{P_{n+1}(x)-xP_n(x)\}.$

母関数　$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (\,-1<x<1,\ |t|<1\,).$

Chebyshev の多項式

定義　$T_n(x) = \cos(n\arccos x) = \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!!}(1-x^2)^{1/2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n-1/2}.$

直交関係式　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (\,m\neq n\,) \\ \pi/2 & (\,m=n\neq 0\,) \\ \pi & (\,m=n=0\,). \end{cases}$

具体形　$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,\quad T_2(x)=2x^2-1,$

$T_3(x)=4x^3-3x,\quad T_4(x)=8x^4-8x^2+1.$

漸化式　$T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0,$

$(1-x^2)T_n'(x) = nT_{n-1}(x)-nxT_n(x).$

母関数　$\displaystyle\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)t^n \quad (\,-1<x<1,\ |t|<1\,).$

Laguerre の多項式

$$
\begin{aligned}
&\text{定義} && L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x}x^n). \\
&\text{直交関係式} && \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} L_m(x) L_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}. \\
&\text{具体形} && L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}, \\
& && L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}, \quad L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{24}. \\
&\text{漸化式} && nL_n(x) + (x - 2n + 1)L_{n-1}(x) + (n-1)L_{n-2}(x) = 0, \\
& && xL_n'(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x). \\
&\text{母関数} && \frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^\infty L_n(x)t^n \quad (\ |t| < 1\ ).
\end{aligned}
$$

Hermite の多項式

$$
\begin{aligned}
&\text{定義} && H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2/2}. \\
&\text{直交関係式} && \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2} H_m(x) H_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}\sqrt{2\pi}\, n!. \\
&\text{具体形} && H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1, \\
& && H_3(x) = x^3 - 3x, \quad H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3. \\
&\text{漸化式} && H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0, \\
& && H_n'(x) = nH_{n-1}(x), \\
&\text{母関数} && \mathrm{e}^{tx - t^2/2} = \sum_{n=0}^\infty H_n(x)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.): Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, ninth printing, Dover, New York, 1970.

[2] 森口繁一，宇田川　久，一松信：岩波　数学公式集 III　特殊函数，岩波書店，1960 年.