解析学・期末試験

（担当）緒方秀教　(e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2018 年 2 月 19 日（月）2 限（解答時間 60 分）

筆記用具以外のものは一切持ち込み不可.

第 1 問　次の関数の $x=0$ における Taylor 級数展開を記せ（答のみ記せばよい）.

$$(1)\ \mathrm{e}^x,\quad (2)\ \cos x,\quad (3)\ \sin x,\quad (4)\ (1+x)^\alpha \quad (a\text{ は定数}).$$

$$(1)\quad \mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$(2)\quad \cos x=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

$$(3)\quad \sin x=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$(4)\quad (1+x)^a=\sum_{n=0}^\infty \binom{a}{n}x^n=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots$$

第 2 問

(1). $\log(1-x)$ の $x=0$ における Taylor 級数展開を記せ（答のみ記せばよい）.

(2). 次の等式が成り立つことを示せ.

$$(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)=1-2\cos\theta\, x+x^2.$$

(3). 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\log(1-2\cos\theta\, x+x^2)=-2\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos n\theta}{n}x^n \quad (\,|x|<1\,).$$

(1). $\log(1-x)=-\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}.$

(2). $(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)=1-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})x+x^2=1-2\cos\theta\, x+x^2.$

(3).

$$\begin{aligned}\log(1-2\cos\theta\, x+x^2) &= \log(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x)+\log(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)\\ &= -\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n}x^n-\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{n}x^n\\ &= -\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{n}x^n=-2\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos n\theta}{n}x^n.\end{aligned}$$

第 3 問　次の常微分方程式の一般解を求めよ．虚数の指数関数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$（$\theta$ は実数変数）は Euler の公式を用いて $\cos, \sin$ を含む形に書き直すこと．

$$(1)\ y'' + 6y' + 5y = 0, \quad (2)\ y'' + y' + y = 0, \quad (3)\ y'' + 4y' + 4y = 0,$$
$$(4)\ y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 14x + 20, \quad (5)\ y'' - y = \mathrm{e}^x(4x + 8).$$

以下，C_1, C_2 などは任意定数とする．

(1). $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-5x}$.

(2). $y = \mathrm{e}^{-x/2}(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

(3). $y = \mathrm{e}^{-2x}(C_0 + C_1 x)$.

(4). 斉次方程式 $y'' + 3y' + 2y = 0$ の一般解は $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$．特解を山辺の方法あるいは演算子法で求める．例えば，演算子法を用いるなら，次のようにして特解が求められる．

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{3}{2}\mathrm{D} + \frac{1}{2}\mathrm{D}^2\right) y = (1 + \mathrm{D}) \left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{D}\right) y &= x^2 + 7x + 10, \\
\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{D}\right) y &= (1 + \mathrm{D})^{-1}(x^2 + 7x + 10) \\
&= (1 - \mathrm{D} + \mathrm{D}^2 - \cdots)(x^2 + 7x + 10) \\
&= (x^2 + 7x + 10) - (2x + 7) + 2 + 0 + \cdots = x^2 + 5x + 5, \\
y &= \left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{D}\right)^{-1} (x^2 + 5x + 5) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{D} + \frac{1}{4}\mathrm{D}^2 - \cdots\right)(x^2 + 5x + 5) \\
&= (x^2 + 5x + 5) - \frac{1}{2}(2x + 5) + \frac{1}{4} \cdot 2 + 0 + \cdots = x^2 + 4x + 3.
\end{aligned}$$

ゆえに，一般解は $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + x^2 + 4x + 3$.

(5). 斉次方程式 $y'' - y = 0$ の一般解は $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x}$．特解を求めるため，$y = \mathrm{e}^x z$ と変換すると，

$$y'' - y = \mathrm{e}^x(z'' + 2z') = \mathrm{e}^x(4x + 8), \quad z'' + 2z' = 4x + 8, \quad z' + 2z = 2x^2 + 8x.$$

あとは例えば演算子法により，

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{D}\right) z &= x^2 + 4x, \\
z &= \left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{D}\right)^{-1} (x^2 + 4x) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{D} + \frac{1}{4}\mathrm{D}^2 - \cdots\right)(x^2 + 4x) \\
&= (x^2 + 4x) - \frac{1}{2}(2x + 4) + \frac{1}{4} \cdot 2x + 0 + \cdots = x^2 + 3x - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

と特解 $z = x^2 + 3x$ すなわち $y = \mathrm{e}^x(x^2 + 3x)$ が求まる．

ゆえに，一般解は $y = \mathrm{e}^x(x^2 + 3x + C_1) + C_2\mathrm{e}^{-x}$.

第 4 問　強制振動を受ける調和振動子の運動方程式は，x を変位として次で与えられる．

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = A\cos\omega t,$$

ただし，$A, \omega(>0), \omega_0(>0)$ は定数である．この運動方程式の一般解を求めよ．

斉次方程式 $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$ の一般解は $x = C_1\cos\omega_0 t + \sin\omega_0 t$.

特解について，$\omega \neq \omega_0$ の場合は，明らかに $y = C\cos\omega t$ （C は定数）の形の特解を持つので，これを方程式に代入して，$C = A/({\omega_0}^2 - \omega^2)$，すなわち，特解 $y = A/({\omega_0}^2 - \omega^2)$ を得る．$\omega = \omega_0$ の場合，まず,

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{1}$$

の特解を求めれば，その実部がもとの方程式の特解となることに注意する．(1) において $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} z$ とおいて代入すれば,

$$\ddot{z} + 2\mathrm{i}\omega_0 \dot{z} = A$$

を得る．これが特解 $z = At/(2\mathrm{i}\omega_0)$ を持つことは直ちにわかる．したがって，(1) の特解 $x = \dfrac{A}{2\mathrm{i}\omega_0} t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ を得る．実部を取って，$x = \dfrac{A}{2\omega_0} t\sin\omega_0 t$.

以上より，もとの方程式の一般解は

$$x(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \begin{cases} \dfrac{A}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\cos\omega t & (\ \omega \neq \omega_0\ ) \\ \dfrac{A}{2\omega_0} t\sin\omega_0 & (\ \omega = \omega_0\ ). \end{cases}$$