

# 数学問題bot, 問題と解答

緒方秀教

2015年5月1日

ツイッターの「数学問題 bot@mathematics\_bot」さんがつぶやかれている数学の問題について、解答の出来上がったものを公開します。しかし、最近「数学問題 bot」以外の問題が多くなってしまっています。

(2015年4月30日 17:17) 1以上100以下の奇数をすべて掛けあわせた数の下3桁を求めよ。

(09ジュニア数オリ予選)

奇数  $2n-1$  ( $n=1,2,\dots$ ) に対して,

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$

と記すことにする。 $(2n-1)!!$  ( $n=1,2,\dots$ ) を1000で割った余りをPCで計算してみたら、次のようになった。

$$\begin{aligned} 1!! &= 1, & 3!! &= 3, & 5!! &= 15, & 7!! &= 105, & 9!! &= 945, & 11!! &\equiv 395, & 13!! &\equiv 135, \\ 15!! &\equiv 25, & 17!! &\equiv 425, & 19!! &\equiv 75, & 21!! &\equiv 575, & 23!! &\equiv 225, \\ 25!! &\equiv 625, & 27!! &\equiv 875, & 29!! &\equiv 375, & 31!! &\equiv 625, \\ 33!! &\equiv 625, & 35!! &\equiv 875, & 37!! &\equiv 375, & 39!! &\equiv 625, \dots \pmod{1000} \end{aligned}$$

と、 $n=13$  ( $2n-1=25$ ) から先は周期4で同じ数字の並びの繰り返しとなる。これを論証すればよい。

**解答**  $n=1,2,\dots$  に対し  $(2n-1)!!$  を1000で割った余りを具体的に計算すれば,

$$(2n-1)!! \equiv \begin{cases} 625 & (n=4k-3) \\ 875 & (n=4k-2) \\ 375 & (n=4k-1) \\ 625 & (n=4k) \end{cases} \pmod{1000} \quad (k=4,5,\dots) \quad (1)$$

となることがわかる。これを数学的帰納法で証明する。 $4 \leq k \leq m-1$  のとき式(1)が正しいと仮定すると,

$$\begin{aligned} \{2(4m-3)-1\}!! &= (8m-7)\{2\cdot 4(m-1)-1\}!! \equiv 625 \cdot (8m-7) \\ &= 5000m - 4375 \equiv 625 \pmod{1000}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{2(4m-2)-1\}!! &= (8m-5)\{2\cdot(4m-3)-1\}!! \equiv 625\cdot(8m-5) \\
&= 5000m - 3125 \equiv 875 \pmod{1000}, \\
\{2(4m-1)-1\}!! &= (8m-3)\{2\cdot(4m-2)-1\}!! \equiv 875\cdot(8m-3) \\
&= 7000m - 2625 \equiv 375 \pmod{1000}, \\
(2\cdot 4m-1)!! &= (8m-1)\{2\cdot(4m-1)-1\}!! \equiv 375\cdot(8m-1) \\
&= 3000m - 375 \equiv 625 \pmod{1000}.
\end{aligned}$$

ゆえに、 $k = m$  の場合も式 (1) が成立することがわかった。

以上の結果を用いると、

$$99!! = (2\cdot 50-1)!! = \{2\cdot(4\cdot 13-2)-1\}!! \equiv 875 \pmod{1000}.$$

(2015.5.1)

(数学問題 bot (個人用) @srinivasa1729 2015 年 4 月 14 日 14:35)  
 $(3^{200} - 2)/7$  の下 3 桁の数を求めよ.

まず、 $3^{200} - 2$  を 7000 で割った余りを求めること。

**解答**  $3^{200}$  を 7000 で割った余りを求める。そのために、 $3^{200}$  を 7,1000 で割った余りを求める。

$3^{200}$  を 7 で割った余りについては、フェルマーの小定理より  $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$  であることから、

$$3^{200} = 3^{6\cdot 33+2} \equiv 3^2 = 9 \equiv 2 \pmod{7}$$

により、2 である。

$3^{200}$  を 1000 で割った余りについて。まず、 $3^{200} = 81^{50}$  である。そして、正の整数  $n$  に対して、

$$\begin{aligned}
81^n &= (1+80)^n = 1 + 80n + 80^2 {}_n C_2 + 80^3 \times (\text{整数}) \\
&\equiv 1 + 80n + 3200n(n-1) \\
&\equiv 1 + 10 \times (8n \text{ の下 2 桁}) + 10^2 \times (2n(n-1) \text{ の 1 の位}) \pmod{10^3}
\end{aligned}$$

である。 $n = 50$  とおくと、 $8 \times 50 = 400$ 、 $2 \times 50 \times 49 = 4900$  より

$$81^{50} \equiv 1 + 10 \times 0 + 10^2 \times 0 = 1 \pmod{10^3}$$

であるから、 $3^{200} = 81^{50}$  を 1000 で割った余りは 1 である。

以上をもとに、中国剰余定理により、 $3^{200}$  を 7000 で割った余りを求める。すなわち、

$$\begin{aligned}
n &\equiv 2 \pmod{7}, \\
n &\equiv 1 \pmod{1000}
\end{aligned}$$

を満たす整数  $n$  を求めれば、 $n \equiv 3^{200} \pmod{7000}$  である。この  $n$  を求めるため、まず、

$$\begin{aligned}
1000f_1 &\equiv 1 \pmod{7}, \\
7f_2 &\equiv 1 \pmod{1000}
\end{aligned}$$

を満たす整数  $f_1, f_2$  を求める. ユークリッドの互除法の計算を行うと,

$$\begin{aligned} 1000 &= 7 \times 142 + 6, & 7 &= 6 + 1, \\ 1 &= 7 - 6 = 7 - (1000 - 7 \times 142) = 7 \times 143 - 1000 \end{aligned}$$

であるから,  $f_1 = -1, f_2 = 143$  を得る. よって,

$$\begin{aligned} n &= 1000f_1 \times 2 + 7f_2 \times 1 = -2000 + 7 \times 143 \times 1 \\ &\equiv 7000 - 2000 + 1001 = 6001 \pmod{7000} \end{aligned}$$

を得,  $3^{200} \equiv 6001 \pmod{7000}$  である. これより,

$$3^{200} - 2 = 5999 + 7000 \times (\text{整数})$$

であるから, 両辺を 7 で割ると,

$$\frac{3^{200} - 2}{7} = 857 + 1000 \times (\text{整数})$$

を得る. ゆえに,  $(3^{200} - 2)/7$  の下 3 桁は 857 である.

(2015.4.28)

(2015 年 4 月 14 日 21:17) 半径 1 の円に内接する正 7 角形 ABCDEFG において,  $AB^2 + AC^2 + AD^2$  の値を求めよ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

(meta\_BE 様)

後半でチェビシエフ多項式を用いたテクニカルな方法を使った. これは, 「高校数学の美しい世界」のチェビシエフ多項式のページ (<http://mathtrain.jp/tn>) を参考にした.

自然数  $n$  に対し  $\cos n\theta$  は  $\cos \theta$  の多項式で表され, その多項式をチェビシエフ多項式と呼ぶ. 具体的には,

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義される多項式  $T_n(x)$  がチェビシエフ多項式である. 例えば,  $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$  より  $T_2(x) = 2x^2 - 1, \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$  より  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ . 三角関数の加法定理を用いれば,  $T_n(x)$  は漸化式

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすことがわかり, これを用いて  $T_n(x)$  を逐次求めることができる.

解答

$$AB = 2 \sin \frac{\pi}{7}, \quad AC = 2 \sin \frac{2\pi}{7}, \quad AD = 2 \sin \frac{3\pi}{7}$$

より,

$$\begin{aligned} AB^2 &= 4 \sin^2 \frac{\pi}{7} = 2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{7} \right) = 2 \left( 1 + \cos \frac{5\pi}{7} \right), \\ AC^2 &= 4 \sin^2 \frac{2\pi}{7} = 2 \left( 1 - \cos \frac{4\pi}{7} \right) = 2 \left( 1 + \cos \frac{3\pi}{7} \right), \\ AD^2 &= 4 \sin^2 \frac{3\pi}{7} = 2 \left( 1 - \cos \frac{6\pi}{7} \right) = 2 \left( 1 + \cos \frac{\pi}{7} \right), \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 + AD^2 = 2 \left( 3 + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right).$$

そこで,  $\cos(\pi/7) + \cos(3\pi/7) + \cos(5\pi/7)$  を求める.  $\theta_k = (2k-1)\pi/7$  ( $k=1,2,3$ ) とおくと,  $3\theta_k = (2k-1)\pi - 4\theta_k$  であるから,

$$\cos 3\theta_k = -\cos 4\theta_k \quad (k=1,2,3).$$

チェビシエフ多項式を用いると,

$$T_3(\cos \theta_k) = -T_4(\cos \theta_k) \quad (k=1,2,3).$$

$x_k = \cos \theta_k$  ( $k=1,2,3$ ) とおくと,

$$\begin{aligned} 4x_k^3 - 3x_k &= -(8x_k^4 - 8x_k^2 + 1), \\ 8x_k^4 + 4x_k^3 - 8x_k^2 - 3x_k + 1 &= 0, \end{aligned}$$

左辺を因数分解して,

$$(x_k + 1)(8x_k^3 - 4x_k^2 - 4x_k + 1) = 0.$$

よって,  $x_k = \cos \theta_k$  ( $k=1,2,3$ ) は方程式

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

の解である. 三次方程式の解と係数の関係より,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}, \\ \therefore AB^2 + AC^2 + AD^2 &= 2 \left( 3 + \frac{1}{2} \right) = 7. \end{aligned}$$

(2015.4.26)

(2015年4月25日 4:17)

- 1).  $2011^{23}$  の下4桁を求めよ.
- 2).  $2011^{23!}$  の下4桁を求めよ.

(cruz\_F 様)

大きい自然数  $n$  に対しては,  $n!$  の下の位は0が何桁も続くことに注意する.

**解答**  $n$  を自然数とすると,

$$\begin{aligned} 2011^n &= (11 + 2 \cdot 10^3)^n \equiv 11^n + 22n \cdot 10^3 \\ &\equiv 11^n + (2n \text{ の } 1 \text{ の位}) \cdot 10^3 \pmod{10^4}, \\ 11^n &= (1 + 10)^n \equiv 1 + 10n + 10^2 {}_n C_2 + 10^3 {}_n C_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv 1 + 10 \cdot (n \text{ の下 } 3 \text{ 桁}) + 10^2 \cdot ({}_n C_2 \text{ の下 } 2 \text{ 桁}) \\ &\quad + 10^3 \cdot ({}_n C_3 \text{ の } 1 \text{ の位}) \pmod{10000} \end{aligned}$$

により,

$$\begin{aligned} 2011^n &\equiv 1 + 10 \cdot (n \text{ の下 } 3 \text{ 桁}) + 10^2 \cdot ({}_n C_2 \text{ の下 } 2 \text{ 桁}) \\ &\quad + 10^3 \cdot (({}_n C_3 + 2n) \text{ の } 1 \text{ の位}) \pmod{10000} \end{aligned}$$

である.

1.  $n = 23$  の場合,

$$\begin{aligned} {}_{23}C_2 &= \frac{1}{2} \cdot 23 \cdot 22 = 23 \cdot 11 = 253, \\ {}_{23}C_3 &= \frac{1}{3!} \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 1771, \\ 2n &= 46 \end{aligned}$$

により,

$$2011^{23} \equiv 1 + 10 \cdot 23 + 10^2 \cdot 53 + 10^3 \cdot (1 + 6) \equiv 2531 \pmod{10000}.$$

ゆえに,  $2011^{23}$  の下 4 桁は 2531 である.

2. まず,  $n = 23!$  の素因数分解を求める. 自然数  $m$  に対し  $m!$  の素因数分解に含まれる素数  $p$  の個数は

$$\left[ \frac{m}{p} \right] + \left[ \frac{m}{p^2} \right] + \left[ \frac{m}{p^3} \right] + \dots$$

で与えられることを用いると,  $23!$  の素因数分解は  $23! = 2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \dots$  であることがわかる. これより,

$$\begin{aligned} 23! &= 10^4 \cdot (\text{整数}), \\ {}_{23!}C_2 &= \frac{1}{2} \cdot 23!(23! - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2^{19} \cdot 5^4 \cdot (\text{整数}) = 2^{18} \cdot 5^4 \cdot (\text{整数}) = 10^4 \cdot (\text{整数}), \\ {}_{23!}C_3 &= \frac{1}{6} \cdot 23!(23! - 1)(23! - 2) = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot (\text{整数}) = 10^4 \cdot (\text{整数}) \end{aligned}$$

である. ゆえに,

$$\begin{aligned} 2011^{23!} &\equiv 1 + 10^5 \cdot (\text{整数}) + 10^2 \cdot 10^4 \cdot (\text{整数}) + 10^3 \cdot 10^4 \cdot (\text{整数}) \\ &= 1 + 10^5 \cdot (\text{整数}) \equiv 1 \pmod{10000} \end{aligned}$$

となり,  $2011^{23!}$  の下 4 桁は 0001 となる.

(2015.4.26)

(難問! 数学問題! @nanmon\_sugaku 2015 年 4 月 20 日 4:54) コンビネーション  ${}_{40}C_{20}$  を 41 で割った余りを求めよ.

自然数  $n$  に対し,  $n!$  を素因数分解したとき含まれる素数  $p$  の数は

$$\left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \left[ \frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

で与えられる（ここで、 $[ \cdot ]$  はガウス記号. すなわち、 $[x]$  は  $x$  を超えない最大の整数である）. なぜなら、 $1, 2, \dots, n$  のうち、

- $p$  で割り切れるものは  $[n/p]$  個
- $p^2$  で割り切れるものは  $[n/p^2]$  個
- $p^3$  で割り切れるものは  $[n/p^3]$  個
- ...

であり、これらの総和が  $n!$  の素因数分解に現れる  $p$  の数であるからである.

解答

$${}_{40}C_{20} = \frac{40!}{(20!)^2}$$

である. そこで、 $40!$ 、 $20!$  の素因数分解を求める.

- $40!$  の素因数分解に含まれる

$$\begin{aligned} 2 \text{ の個数は } & \left[ \frac{40}{2} \right] + \left[ \frac{40}{2^2} \right] + \dots = \left[ \frac{40}{2} \right] + \left[ \frac{40}{4} \right] + \left[ \frac{40}{8} \right] + \left[ \frac{40}{16} \right] + \left[ \frac{40}{32} \right] + \left[ \frac{40}{64} \right] + \dots \\ & = 20 + 10 + 5 + 2 + 1 = 38, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ の個数は } & \left[ \frac{40}{3} \right] + \left[ \frac{40}{3^2} \right] + \dots = \left[ \frac{40}{3} \right] + \left[ \frac{40}{9} \right] + \left[ \frac{40}{27} \right] + \left[ \frac{40}{81} \right] + \dots \\ & = 13 + 4 + 1 = 18, \end{aligned}$$

$$5 \text{ の個数は } \left[ \frac{40}{5} \right] + \left[ \frac{40}{5^2} \right] + \dots = \left[ \frac{40}{5} \right] + \left[ \frac{40}{25} \right] + \left[ \frac{40}{125} \right] + \dots = 8 + 1 = 9,$$

$$7 \text{ の個数は } \left[ \frac{40}{7} \right] + \left[ \frac{40}{7^2} \right] + \dots = \left[ \frac{40}{7} \right] + \left[ \frac{40}{49} \right] + \dots = 5,$$

$$11 \text{ の個数は } \left[ \frac{40}{11} \right] + \left[ \frac{40}{11^2} \right] + \dots = 3,$$

$$17 \text{ の個数は } \left[ \frac{40}{17} \right] + \left[ \frac{40}{17^2} \right] + \dots = 2,$$

$$19 \text{ の個数は } \left[ \frac{40}{19} \right] + \left[ \frac{40}{19^2} \right] + \dots = 2,$$

$23, 29, 31, 37$  の個数はいずれも 1 である.

よって、 $40!$  の素因数分解は

$$40! = 2^{38} \cdot 3^{18} \cdot 5^9 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$$

である.

- $20!$  の素因数分解に含まれる

$$\begin{aligned} 2 \text{ の個数は } & \left[ \frac{20}{2} \right] + \left[ \frac{20}{2^2} \right] + \dots = \left[ \frac{20}{2} \right] + \left[ \frac{20}{4} \right] + \left[ \frac{20}{8} \right] + \left[ \frac{20}{16} \right] + \left[ \frac{20}{32} \right] + \dots \\ & = 10 + 5 + 2 + 1 = 18, \end{aligned}$$

$$3 \text{ の個数は } \left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{3^2} \right\rfloor + \cdots = \left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{27} \right\rfloor + \cdots = 6 + 2 = 8,$$

$$5 \text{ の個数は } \left\lfloor \frac{20}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{5^2} \right\rfloor + \cdots = \left\lfloor \frac{20}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{25} \right\rfloor + \cdots = 4,$$

$$7 \text{ の個数は } \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{7^2} \right\rfloor + \cdots = 2,$$

11, 13, 17, 19 の個数はいずれも 1 である.

よって,  $20!$  の素因数分解は

$$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

である.

以上より,  ${}_{40}C_{20}$  の素因数分解は

$$\begin{aligned} {}_{40}C_{20} &= \frac{2^{38} \cdot 3^{18} \cdot 5^9 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37}{(2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19)^2} \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \end{aligned}$$

である.

$$2^2 \equiv 4 \pmod{41},$$

$$2^2 \cdot 3^2 \equiv 36 \equiv -5 \pmod{41},$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \equiv (-5) \cdot 5 \equiv -25 \equiv 16 \pmod{41},$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \equiv 16 \cdot 7 = 112 \equiv 30 \equiv -11 \pmod{41},$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \equiv (-11) \cdot 11 = -121 \equiv 2 \pmod{41},$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdots 11 \cdot 13 \equiv 2 \cdot 13 = 26 \equiv -15 \pmod{41},$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdots 13 \cdot 23 \equiv (-15) \cdot (-18) = 270 \equiv 24 \equiv -17 \pmod{41},$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdots 23 \cdot 29 \equiv (-17) \cdot (-12) = 40 \equiv -1 \pmod{41},$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdots 29 \cdot 31 \equiv (-1) \cdot (-10) = 10 \pmod{41},$$

$$2^2 \cdot 3^2 \cdots 31 \cdot 37 \equiv 10 \cdot (-4) = -40 \equiv 1 \pmod{41}.$$

ゆえに,  ${}_{40}C_{20}$  を 41 で割った余りは 1 である.

(2015.4.25)

(自作数学問題 bot @mathquestionakt 2015 年 4 月 23 日 22:24) 次の条件を満たす  $\{S_n(m)\}$  を,  $m, n$  を用いて表せ. ただし,  $m, n$  はともに自然数とする.

$$S_0(m) = 1, \quad S_n(m) = \sum_{k=1}^m S_{n-1}(k).$$

解答 まず,  $n = 1, 2, 3$  に対して  $S_n(m)$  を求めてみる.

$$\begin{aligned} S_1(m) &= \sum_{k=1}^m S_0(k) = \sum_{k=1}^m 1 = m, \\ S_2(m) &= \sum_{k=1}^m S_1(k) = \sum_{k=1}^m k = \frac{1}{2}m(m+1), \\ S_3(m) &= \sum_{k=1}^m S_2(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m k = \frac{1}{12}m(m+1)(2m+1) + \frac{1}{4}m(m+1) \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(m+2). \end{aligned}$$

これらより,

$$S_n(m) = \frac{1}{n!}m(m+1)\cdots(m+n-1) \quad (2)$$

と推測される. これを  $n$  についての数学的帰納法により証明する.  $n-1$  の場合に式 (2) が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} S_n(m) &= \sum_{k=1}^m S_{n-1}(k) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^m k(k+1)\cdots(k+n-2) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^m k(k+1)\cdots(k+n-2)\{(k+n-1)-(k-1)\} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^m k(k+1)\cdots(k+n-1) - \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^m (k-1)k(k+1)\cdots(k+n-2) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^m k(k+1)\cdots(k+n-1) - \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{m-1} k(k+1)\cdots(k+n-1) \\ &= \frac{1}{n!}m(m+1)\cdots(m+n-1). \end{aligned}$$

ゆえに, 自然数  $m, n$  に対して式 (2) が成立することが証明された.

(2015.4.24)

(数学問題 bot (個人用) @srinivasa1729 2015 年 4 月 18 日 2:34) 任意の非負整数  $n$  に対して  $\cos(2^n x) < 0$  となるような実数  $x$  ( $0 \leq x < 2\pi$ ) を求めよ.

こんなところで二進数を使うとは思ってもみなかった.

解答 以下, 二進数を利用するので, ここで二進数の表記の仕方を定義しておく. ある実数が

$$\begin{aligned} a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + a_1 2 + a_0 + a_{-1} 2^{-1} + a_{-2} 2^{-2} + \cdots, \\ a_k = 1, \quad a_{k-1}, a_{k-2}, \dots \text{ は } 0 \text{ または } 1 \end{aligned}$$

と表されるとき, この実数を

$$(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_2$$

と表すことにする.



さて、実数  $x$  が満たすべき条件は、任意の非負整数  $n$  に対し

$$\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi < 2^n x < \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi \quad (k \text{ は整数})$$

が成り立つことである。  $x = (\pi/2)\xi$  とおくと、この条件は

$$4k + 1 < 2^n \xi < 4k + 3 \quad (k \text{ は整数})$$

となる。二進数表記を用いると、この条件は

$$(* \dots * 01)_2 < 2^n \xi < (* \dots * 11)_2 \quad (3)$$

と表される。ここで  $*$  は 0 または 1 であり、最左辺と最右辺とで  $* \dots *$  の並びは同一であるとする。つまり、 $2^n \xi$  の二進数表記での整数部分は  $(* \dots * 01)_2$  または  $(* \dots * 10)_2$  となるのである。

まず、条件  $0 \leq x < 2\pi$  より

$$0 \leq \xi < 4, \quad \text{すなわち,} \quad 0 \leq \xi < (100)_2.$$

そして、 $2^n$  を掛けるということは、二進数表記では小数点を  $n$  桁右へ動かすことに相当する。そのことを考慮すると、任意の非負整数  $n$  に対し式 (3)、すなわち、上述の太字部分を満たすような  $\xi$  は

$$\xi = (1.010101\dots)_2 \quad \text{または} \quad (10.101010\dots)_2$$

である。十進数に直すと、

$$\begin{aligned} (1.010101\dots)_2 &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots = \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3}, \\ (10.101010\dots)_2 &= 2 \times (1.010101\dots)_2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\xi = \frac{4}{3} \quad \text{または} \quad \frac{8}{3},$$

すなわち、

$$x = \frac{2\pi}{3} \quad \text{または} \quad \frac{4\pi}{3}.$$

(2015.4.20)

(難問! 数学問題@nanmon\_sugaku 2015年4月17日18:24) 図1は知恩寺文殊堂に奉納された算額に描かれたものである。半径  $2r$  の大円4つと半径  $r$  の小円3つから構成され、外側の3つの大円の共有点が内側の大円の中心である。図の斜線部分の面積はいくらか。

(08 京都高校生数学コンテスト)

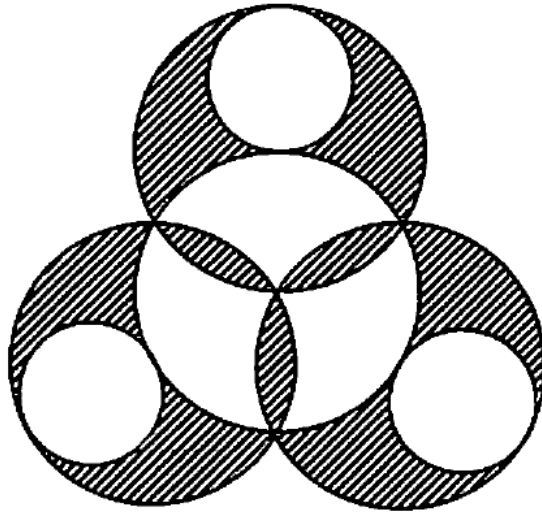


図 1: 知恩寺文殊堂の算額

解答 図 2 の影をつけた部分の面積  $S$  の 3 倍が, 求める面積である.

$$\begin{aligned}
 S &= (\text{半径 } 2r \text{ の円の面積}) - (\text{半径 } r \text{ の円の面積}) - (\text{半径 } 2r, \text{ 中心角 } 120^\circ \text{ の扇形の面積}) \\
 &= \pi(2r)^2 - \pi r^2 - \frac{1}{3}\pi(2r)^2 = \frac{5}{3}\pi r^2, \\
 \therefore (\text{求める面積}) &= 3S = 5\pi r^2.
 \end{aligned}$$

(2015.4.19)

2015 年 4 月 4 日に, 「 $n$  が正の整数で  $2^n + 1$  が素数ならば  $n$  は 2 のべきであることを証明せよ」という問題と解答を載せた.  $n$  が奇数の約数を持つと矛盾を生じるということを示すという方針で証明を行ったが,  $n = \text{奇素数}$  の場合をチェックするのを忘れていた. それで, その場合を解答に追加した.

(2015.4.19)

(前略) 3) 数列  $a_n$  を

$$a_n = \left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right) \left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.

(08 広島・理)

これも出題元の広島大学入試過去問を調べて, 省略してある誘導部分を見て解いた. この過去問の誘導に従って解いてみた.

解答

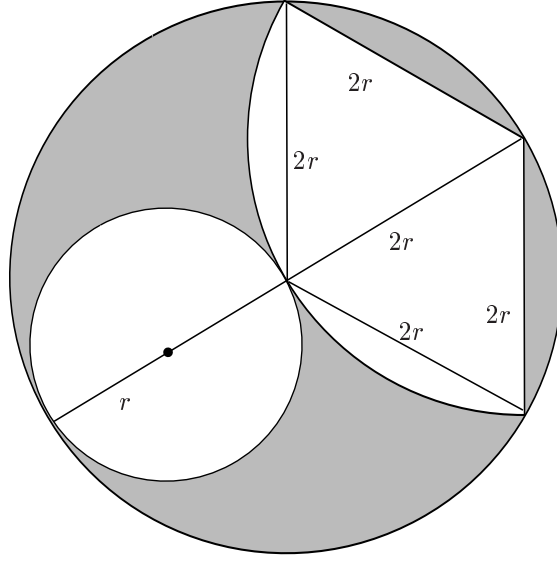


図 2: 影をつけた部分の面積  $S$  を 3 倍すればよい.

1. まず、次の不等式を証明する.

$$\frac{x}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n} \quad (0 \leq x \leq 1, n \text{ は自然数}). \quad (4)$$

$f(x) = \frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$  とおくと,  $f'(x) = \frac{1}{n(x+n)} \geq 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ). よって,  $f(x)$  は  $0 \leq x \leq 1$  で単調増加であるから,  $f(x) = \frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \geq f(0) = 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ).  
 $g(x) = \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$  とおくと,  $g'(x) = \frac{1-x}{(n+1)(n+x)} \geq 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) より  $g(x)$  は  $0 \leq x \leq 1$  で単調増加であるから,  $g(x) = \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n+1} \geq g(0) = 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ ).

2. 不等式 (4) を  $x = (k/n)^5$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) に適用することにより,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 \leq \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k^5}{n^6}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5$$

を得る.  $n \rightarrow \infty$  とすると,

$$\text{右辺} \rightarrow \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6},$$

$$\text{左辺} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}$$

により,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k^5}{n^6}\right) = \frac{1}{6}$ .

$$a_n = \exp\left(\sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k^5}{n^6}\right)\right) \rightarrow e^{1/6} \quad (n \rightarrow \infty).$$

追記 どのようにして出題者は不等式 (4) による誘導を思いついたのか、について. 大学でテイラー展開を勉強するとき,  $\log(1+x)$  は

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

という無限級数で表されることを習う. これより,  $|x|$  が小さいとき, 近似

$$\log(1+x) \approx x$$

が成り立つ. これを出発点として, 少々試行錯誤して不等式 (4) を導いたと推測する.

(2015.4.16)

(前略)  $k = 1, 2, \dots, n-1$  について  $A_k = \{\sin(k\pi/2n)\}^{-2}$  とおくと, (中略)

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k = \frac{2n^2 - 2}{3}$$

となることを示せ.

(90 東工大)

この問題, 手も足も出ないな~ と思ったら, 問題文に「前略」, 「中略」とある. だから, 原典の入試問題を調べたらその部分に誘導がついていると思い, ネットで原典を調べた. そうしたら, 次の誘導がついていた.

1.  $n-1$  次多項式  $P_n(x)$  と  $n$  次多項式  $Q_n(x)$  ですべての実数  $\theta$  に対して

$$\sin(2n\theta) = n \sin(2\theta) P_n(\sin^2 \theta), \quad \cos(2n\theta) = Q_n(\sin^2 \theta)$$

を満たすものが存在することを帰納法を用いて示せ.

- 2.

$$P_n(x) = (1 - A_1 x)(1 - A_2 x) \cdots (1 - A_{n-1} x)$$

となることを示せ.

これを見て, あゝ ~ と思った. これがないと出来んわ.

### 誘導部分の解答

1. 三角関数の加法定理を用いれば簡単に証明できるので, 略.
2. 次の二項を示せばよい.

(a)  $P_n(\sin^2(k\pi/2n)) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$

(b)  $P_n(x)$  の定数項  $P_n(0) = 1.$

前者については,

$$P_n(\sin^2 \theta) = \frac{1}{n} \frac{\sin(2n\theta)}{\sin(2\theta)} \tag{5}$$

で  $\theta = k\pi/(2n)$  と置くことにより,

$$P_n\left(\sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right) = n \frac{\sin(k\pi)}{\sin(k\pi/n)} = 0$$

となり, 示された. 後者については, 式 (5) で  $\theta \rightarrow 0$  とすることにより示される.

本題の証明

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k = -(P_n(x) \text{ の } x \text{ の係数}) = -P'_n(0)$$

である. そこで, まず  $P'_n(x)$  について調べる.  $x = \sin^2 \theta$  とおくと,

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{dP_n(x)/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{1}{\sin 2\theta} \frac{dP_n(\sin^2 \theta)}{d\theta}. \quad (6)$$

一方,

$$\sin(2n\theta) = n \sin(2\theta) P_n(\sin^2 \theta)$$

の両辺を  $\theta$  で微分して,

$$\begin{aligned} 2n \cos(2n\theta) &= 2n \cos(2\theta) P_n(\sin^2 \theta) + n \sin(2\theta) \frac{d}{d\theta} P_n(\sin^2 \theta), \\ \frac{1}{\sin 2\theta} \frac{d}{d\theta} P_n(\sin^2 \theta) &= 2 \frac{\cos(2n\theta) - \cos 2\theta P_n(\sin^2 \theta)}{\sin^2 2\theta}. \end{aligned} \quad (7)$$

そして,

$$\begin{aligned} &(1 - 2 \sin^2 n\theta) - (1 - 2 \sin^2 \theta) \underbrace{\{P_n(0) + P_n(\sin^2 \theta) - P_n(0)\}}_1 \\ \text{式 (7) 右辺} &= \frac{\phantom{1 - 2 \sin^2 n\theta} - \phantom{(1 - 2 \sin^2 \theta) \{P_n(0) + P_n(\sin^2 \theta) - P_n(0)\}}}{2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 n\theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} \frac{P_n(\sin^2 \theta) - P_n(0)}{\sin^2 \theta} \\ &\rightarrow (1 - n^2) - \frac{1}{2} P'_n(0) \quad (\theta \rightarrow 0) \end{aligned}$$

を得るので, 式 (6) で  $x \rightarrow 0$  ( $\theta \rightarrow 0$ ) とすることにより,

$$P'_n(0) = 1 - n^2 - \frac{1}{2} P'_n(0), \quad P'_n(0) = \frac{2(1 - n^2)}{3}.$$

ゆえに,

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k = -P'_n(0) = \frac{2(n^2 - 1)}{3}.$$

**追記**  $\cos n\theta$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) は  $\cos \theta$  の  $n$  次多項式で表され, この多項式はチェビシエフ多項式と呼ばれる. すなわち,

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義される  $n$  次多項式  $T_n(x)$  はチェビシエフ多項式と呼ばれる (たとえば,  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$  より  $T_2(x) = 2x^2 - 1$ ,  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$  より  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ ). これは応用数学で多用される. 本問の多項式  $Q_n(x)$  は,

$$Q_n(\sin^2 \theta) = \cos(2n\theta) = T_n(\cos 2\theta) = T_n(1 - 2 \sin^2 \theta)$$

より, チェビシエフ多項式を用いて

$$Q_n(x) = T_n(1 - 2x)$$

と表される.

(2015.4.15)

(難問! 数学問題@nanmon\_sugaku 2015 年 4 月 14 日 8:03)

自然数  $n$  に対して  $3^n$  の桁数を  $k_n$  とする. 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n}$  を求めよ.

(09 慶應医)

自然数の桁数が  $k$  である条件は何かを考えること.

解答  $k_n$  の定義から

$$10^{k_n-1} \leq 3^n < 10^{k_n}$$

が成り立つ. 各辺の常用対数をとって,

$$k_n - 1 \leq n \log_{10} 3 < k_n,$$

よって,

$$\log_{10} 3 < \frac{k_n}{n} \leq \log_{10} 3 + \frac{1}{n}$$

が成り立つ.  $n \rightarrow \infty$  として,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = \log_{10} 3$$

を得る.

(2015.4.15)

(2015 年 4 月 10 日 19:17) 自然数  $a, b, c, d$  は  $c = 4a + 7d$ ,  $d = 3a + 4b$  を満たしているものとする.

- 1).  $c + 3d$  が 5 の倍数ならば  $2a + b$  も 5 の倍数であることを示せ.
- 2).  $a$  と  $b$  が互いに素で,  $c$  と  $d$  がどちらも素数  $p$  の倍数ならば  $p = 5$  であることを示せ.

(09 千葉大前期)

とことん “mod  $p$ ” の計算で攻めていく. 2) では,  $5 \times (\text{整数}) \equiv 0 \pmod{p}$  をひねり出すところがポイント.

解答

- 1). “mod 5” で考える.

$$c + 3d \equiv (-a + 2b) + 3(3a - b) \equiv 8a - b \equiv 3a - b \equiv 0 \pmod{5}$$

により,  $b \equiv 3a \pmod{5}$ .

$$2a + b \equiv 2a + 3a = 5a \equiv 0 \pmod{5}.$$

2). “mod  $p$ ” で考える.

$$\begin{aligned}c &= 4a + 7b \equiv 0 \pmod{p}, & d &= 3a + 4b \equiv 0 \pmod{p}, \\c + 2d &= 10a + 15b = 5(2a + 3b) \equiv 0 \pmod{p}.\end{aligned}$$

よって,  $5 \equiv 0 \pmod{p}$ , または,  $2a + 3b \equiv 0 \pmod{p}$  である.

$2a + 3b \equiv 0 \pmod{p}$  とすると,  $3b \equiv -2a \pmod{p}$ .

$$c = 2(2a) + 7b \equiv 2(-3b) + 7b = b \equiv 0 \pmod{p}, \quad d \equiv 3a \equiv 0 \pmod{p}.$$

$a, b$  は互いに素であるから,  $p = 3$  を得る. よって,  $b \equiv 0 \pmod{3}$  となるが, これを  $2a + 3b \equiv 0 \pmod{p (= 3)}$  に代入すると,  $2a + 3b \equiv 2a \equiv 0 \pmod{3}$ , よって,  $a \equiv 0 \pmod{3}$ . 結局,  $a, b \equiv 0 \pmod{3}$  となり,  $a, b$  が互いに素であることに矛盾する.

ゆえに,  $5 \equiv 0 \pmod{p}$ , すなわち,  $p = 5$  である.

追記 “mod  $p$ ” を使わなかったら, 恐ろしく煩雑な計算になっただろうな…

(2015.4.11)

(2015年4月8日 5:17) 数列  $\{A_n\}$  を

$$A_0 = 1, \quad A_n = \sum_{k=1}^n 3^k A_{n-k} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める. (中略) 2)  $A_n$  を求めよ.

(00 横浜国立大・経)

数列の簡単な練習問題である. はじめの何項かを具体的に計算して一般項を推測し, それを数学的帰納法で証明するという常套手段を使う. 漸化式から, 一般項は 3 のべき乗を含みそう (こういう「見当」をつけておくことは大事) …

解答 はじめの何項かを具体的に計算する.

$$A_1 = 3A_0 = 3,$$

$$A_2 = 3A_1 + 3^2A_0 = 3 \cdot 3 + 3^2 = 2 \cdot 3^2,$$

$$A_3 = 3A_2 + 3^2A_1 + 3^3A_0 = 2 \cdot 3^3 + 3^3 + 3^3 = 2^2 \cdot 3^3,$$

$$A_4 = 3A_3 + 3^2A_2 + 3^3A_1 + 3^4A_0 = 2^2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^4 + 3^4 + 3^4 = 2^3 \cdot 3^4.$$

以上より,

$$A_0 = 1, \quad A_n = 2^{n-1} \cdot 3^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と推測される. これを数学的帰納法で証明する.  $A_k = 2^{k-1} \cdot 3^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) と仮定すると,

$$A_n = \sum_{k=1}^n 3^k A_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \cdot 2^{n-k-1} \cdot 3^{n-k} + 3^n$$

$$\begin{aligned}
&= 3^n \sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-k-1} + 3^n = 3^n \sum_{k=0}^{n-2} 2^k + 3^n \\
&= 3^n \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 3^n = 2^{n-1} \cdot 3^n.
\end{aligned}$$

**追記** はじめに数項を計算する時、最後まで計算しちやって  $A_1 = 3, A_2 = 18, A_3 = 108, A_4 = 648$  としてしまわないこと。上で述べたように、一般項は  $3$  のべき乗で表されると予想されるので、 $A_2 = 2 \cdot 3^2, A_3 = 2^2 \cdot 3^3, A_4 = 2^3 \cdot 3^4, \dots$  と  $3$  のべき乗をこの段階で残しておけば、一般項の推測がしやすくなる。

(2015.4.9)

(2015年4月8日 3:17)

1). 全ての自然数  $k$  に対して

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

を示せ。

2).  $m > n$  なる全ての自然数  $m, n$  に対して

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\left(\frac{m}{n}\right) - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

を示せ。

(10 東大理系)

第1問の誘導をどうやって第2問に結び付けられるか? それには、 $\log(m/n) - \sum_{k=n+1}^m 1/k$  という量を第1問の積分でどうやって表すかがポイントである。

**解答**

1).  $0 < x < 1$  で  $k < k+x < k+1$  であるから、

$$\frac{1}{k+1} \int_0^1 (1-x) dx < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{k} \int_0^1 (1-x) dx.$$

積分  $\int_0^1 (1-x) dx$  を計算して題意の不等式を得る。

2).

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{m}{n}\right) - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} &= \int_n^m \frac{dx}{x} - \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} - \sum_{k=n}^{m-1} \int_0^1 \frac{dx}{k+1} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \int_0^1 \left( \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k+1} \right) dx
\end{aligned}$$



$$= \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2k} \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx. \quad (8)$$

式(8)最右辺を上下から評価すればよい<sup>1</sup>。前問の結果を用いて、

$$\begin{aligned} (8) \text{ 最右辺} &> \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2(k+1)^2} = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^m \int_k^{k+1} \frac{dx}{k^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^m \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2} \int_{n+1}^{m+1} \frac{dx}{x^2} = \frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}, \\ (8) \text{ 最右辺} &< \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{m-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) = \frac{m-n}{2mn}. \end{aligned}$$

ゆえに題意の不等式が得られた。

補足

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

はオイラー定数と呼ばれる。

更に補足

$$\int_n^m f(x) dx = \sum_{k=n}^{m-1} \int_0^1 f(x+k) dx$$

という式変形は、大学の数学でも結構用いる。

(2015.4.9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

この無限級数の等式は有名である。

$1 + 1/2^2, 1 + 1/2^2 + 1/3^2, \dots$  という足し算を無限に行っていったら、 $\pi^2/6$  という値になる。上の有理数の足し算に円周率  $\pi$  が入ってくる余地はなさそうに見えるのだが、なぜ  $\pi^2/6$  という値になるのだろうか？なかなか神秘的な等式である。

この等式はふつう、大学に入ってフーリエ解析の勉強をする時習うのだが、実は高校数学の範囲で示すことができるのである。2003年の日本女子大学理学部の入試（自己推薦入試）にこの問題が出題されたのである（この情報は、「伝説の入試問題（数学）について」

<http://examoonist.web.fc2.com/legendexam.html> で得ました。）。そこで、この入試問題に沿って、上の等式の高校数学による証明を示す。

<sup>1</sup>上からの評価と下からの評価で方法が違うから、戸惑う人も多いかもしれない。

**証明**  $0^\circ \sim 4^\circ$  の 5 段階に分けて証明する.

0°.  $n = 0, 1, 2, \dots$  として次の積分を定義する.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

このとき, 漸化式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

が成り立ち, この漸化式を用いて,

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

を得る. これは高校数学の標準的な練習問題であるから, 証明は略する.

1°.  $n = 0, 1, 2, \dots$  として次の積分を定義する.

$$S_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x dx.$$

このとき, 次の漸化式が成立する.

$$S_n = \frac{2n-1}{2n} \left\{ S_{n-1} - \frac{2I_{2n}}{2n(2n-1)} \right\} \quad (n \geq 1).$$

証明は,  $I_n$  の漸化式の証明と似ている. 部分積分により,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n-1} x (\sin x)' dx \\ &= \left[ x^2 \cos^{2n-1} x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (x^2 \cos^{2n-1} x)' \sin x dx \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-1} x \sin x dx + (2n-1) \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n-2} x \sin^2 x dx \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-1} x \sin x dx + (2n-1) \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n-2} x (1 - \cos^2 x) dx \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-1} x \sin x dx + (2n-1)(S_{n-1} - S_n). \end{aligned} \tag{9}$$

$I_n$  の漸化式の証明と違うのは, ここで  $\int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-1} x \sin x dx$  の積分が現れるということ  
で, これは厄介である (実際の入試でも, ここで解答が止まった人と先へ進めた人が分かれた  
たのではないか). この積分の処理を考える. 部分積分により,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-1} x \sin x dx &= - \int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-1} x (\cos x)' dx \\ &= - \left[ x \cos^{2n-1} x \cdot \cos x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x \cos^{2n-1} x)' \cos x dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx - (2n-1) \int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-2} x \sin x \cos x dx \end{aligned}$$

$$= I_{2n} - (2n-1) \int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-1} x \sin x dx.$$

これを  $\int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-1} x \sin x dx$  について解いて、

$$\int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-1} x \sin x dx = \frac{I_{2n}}{2n}$$

を得る. これを式 (9) に代入して, 題意の漸化式を得る.

2°. 1° の漸化式を用いて, 次の等式が得られる.

$$S_N = \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right). \quad (10)$$

ここで  $\pi^2/6$  が現れたので, 「おっ!？」と思う. 問題の等式を得るまでの道筋が見えてきたような気がする. 証明は次の通り. 0°, 1° の漸化式を繰り返し用いて,

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{2N-1}{2N} \left\{ S_{N-1} - \frac{2I_{2N}}{2N(2N-1)} \right\} = \frac{2N-1}{2N} S_{N-1} - \frac{2I_{2N}}{4N^2} \\ &= \frac{2N-1}{2N} \frac{2N-3}{2N-2} \left\{ S_{N-2} - \frac{2I_{2N-2}}{(2N-2)(2N-3)} - \frac{2(2N-1)}{4N^2 \cdot 2N} I_{2N-2} \right\} \\ &= \frac{2N-1}{2N} \frac{2N-3}{2N-2} S_{N-2} - \frac{2N-1}{2N} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N-1)^2} \right\} I_{2(N-1)} \\ &= \frac{2N-1}{2N} \frac{2N-3}{2N-2} \frac{2N-5}{2N-4} \left\{ S_{N-3} - \frac{2I_{2N-4}}{(2N-4)(2N-5)} \right\} \\ &\quad - \frac{2N-1}{2N} \left\{ \frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N-1)^2} \right\} \frac{2N-3}{2N-2} I_{2N-4} \\ &= \frac{2N-1}{2N} \frac{2N-3}{2N-2} \frac{2N-5}{2N-4} S_{N-3} \\ &\quad - \frac{(2N-1)(2N-3)}{(2N)(2N-2)} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N-1)^2} + \frac{1}{(N-2)^2} \right\} I_{2(N-2)} \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

この操作を続けていって,

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{2N-1}{2N} \frac{2N-3}{2N-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} S_0 - \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5\cdot 3}{(2N)(2N-2)\cdots 6\cdot 4} \cdot \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right) I_2 \\ &= \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2} \left( S_0 - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} I_2 \right) \end{aligned}$$

を得る.

$$S_0 = \int_0^{\pi/2} x^2 dx = \frac{\pi^2}{24}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

を代入して, 式 (10) を得る.

3°. 次の不等式が成り立つ.

$$S_N \leq \frac{1}{2N+2} \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^3.$$

証明は次の通り.

$$x < \frac{\pi}{2} \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

を用いて,

$$\begin{aligned} S_N &\leq \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)^2 \cos^{2N} x dx = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \cos^{2N} x dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} (I_{2N} - I_{2N+2}) = \frac{\pi^2}{4} I_{2N} \left(1 - \frac{2N+1}{2N+2}\right) = \frac{\pi^2 I_{2N}}{4(2N+1)} \\ &= \frac{\pi^2}{4(2N+2)} \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2N+2} \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdots 4\cdot 2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

4°. 2°, 3° より

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2N+2} \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2N)(2N-2)\cdots 4\cdot 2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

これと  $S_N \geq 0$  により,

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{\pi^2}{2}.$$

$N \rightarrow \infty$  とすると最右辺は 0 になるので,

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

を得る.

(証明終わり)

(2015.4.8)

(難問! 数学問題! @nanmon\_sugaku2015年4月6日 2:25)

$\tan 1^\circ$  は有理数か.

(06 京都後期・文理)

問題・解答ともに非常に有名であります...

**解答**  $\tan 1^\circ$  が有理数であると仮定する. 加法定理

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

より,  $\tan 2^\circ = \tan(1^\circ + 1^\circ)$  も有理数となる. 同様に,  $\tan 3^\circ = \tan(2^\circ + 1^\circ)$  も有理数となる. 同様に,  $\tan 4^\circ = \tan(3^\circ + 1^\circ)$  も有理数となる. ...この論法を続けていくと,  $\tan 30^\circ$  が有理数であることが結論されるが, これは  $\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$  が無理数であることに矛盾する. ゆえに,  $\tan 1^\circ$  は有理数でない.

(2015.4.7)

(難問！数学問題！@nanmon\_sugaku 2015年4月3日 14:24) 2008個の分数

$$\frac{1}{2008}, \frac{2}{2008}, \dots, \frac{2008}{2008}$$

の中で既約分数であるものの和を求めよ.

(08 京都高校生数学コンテスト)

正の整数  $n$  が  $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$  と素因数分解される時、 $n$  の約数の総和は

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{m_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{m_2}) \dots (1 + p_s + p_s^2 + \dots + p_s^{m_s})$$

である.

解答 まず,

$$\frac{1}{2008}, \frac{2}{2008}, \dots, \frac{2008}{2008} \tag{11}$$

の総和は

$$\frac{1}{2008} \sum_{k=1}^{2008} k = \frac{1}{2008} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2008 \cdot 2009 = \frac{2009}{2}$$

である. 分数  $k/2008$  ( $k = 1, 2, \dots, 2008$ ) が既約分数でないのは、 $k$  が 2008 の 1 でない約数のときである. そして、2008 の 1 でない約数の総和は、2008 が  $2^3 \cdot 251$  と素因数分解されることから (251 が素数であることはどうやればわかるのだろうか？私は「数の帝国」<http://ja.numberempire.com> の世話になった),

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \cdot (1 + 251) - 1 = 15 \cdot 252 - 1 = 3780 - 1$$

である. よって、分数 (11) のうち既約分数でないものの総和は,

$$\frac{3780 - 1}{2008}$$

である. ゆえに、分数 (11) のうち既約分数であるものの総和は

$$\frac{2009}{2} - \frac{3780 - 1}{2008} = \frac{2013257}{2008}$$

である.

(2015.4.6)

(難問！数学問題！@nanmon\_sugaku 2015年4月5日 12:15) 数列  $a_n$  は全ての正の整数  $n$  に対して

$$0 \leq 3a_n \leq \sum_{k=1}^n a_k$$

を満たしているとする. このとき全ての  $n$  に対して  $a_n = 0$  であることを示せ.

(10 京都・理甲)

解いてみるとわかるが、この問題の何処に数学的面白さがあるというのだ？京都大学がこんな出題をすることはとても思えないのだが…

解答 数学的帰納法により証明する.

$n = 1$  の場合は, 問題文の不等式は

$$0 \leq 3a_1 \leq a_1, \quad 0 \leq a_1 \leq 0$$

となるので,  $a_1 = 0$  を得る.

$a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$  と仮定すると, 問題文の不等式は

$$0 \leq 3a_n \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = a_n$$

となるので,

$$0 \leq a_n \leq 0, \quad \therefore a_n = 0.$$

(2015.4.6)

(数学問題 bot (個人用) @srinivasa1729 2015 年 4 月 5 日 20:34)  $p$  を素数,  $a, b$  を互いに素な正の整数とすると,  $(a + ib)^p$  は実数でないことを示せ. (2000 年京大前期理系)

まず,  $p = 3, 5$  といった簡単な場合で確認する (これが重要).

$p = 3$  の場合,  $(a + ib)^3 = a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3$  が実数であるとする,

$$3a^2b - b^3 = 0, \quad b^2 = 3a^2.$$

よって,  $b^2$  は 3 の倍数となり, 3 が素数であることから,  $b$  自身が 3 の倍数となる.  $b = 3m$  ( $m$  は整数) とおいて上の式に代入すると,

$$3a^2 = (3m)^2 = 9m^2, \quad a^2 = 3m^2$$

となり,  $a^2$  は 3 の倍数となる. 再び, 3 が素数であることから,  $a$  自身が 3 の倍数となる. 結局,  $a, b$  ともに 3 の倍数となり, これは  $a, b$  が互いに素と仮定したことに矛盾する.

$p = 5$  の場合.  $(a + ib)^5 = a^5 + 5ia^4b - 10a^3b^2 - 10ia^2b^3 + 5ab^4 + ib^5$  が実数であるとする,

$$5a^4b - 10a^2b^3 + b^5 = 0, \quad b^4 = 5a^2(2b^2 - a^2)$$

となり,  $b^4$  は 5 の倍数となる. 5 が素であることから,  $b$  自身が 5 の倍数となる.  $b = 5m$  ( $m$  は整数) とおいて上の式に代入すると,

$$(5m)^4 = 5a^2\{2(5m)^2 - a^2\}, \quad a^4 = 5^2m^2(2a^2 - 5m^2)$$

となり,  $a^4$  は 5 の倍数となる. 再び, 5 が素であることから,  $a$  自身が 5 の倍数となる. 結局,  $a, b$  ともに 5 の倍数となり, これは  $a, b$  が互いに素と仮定したことに矛盾する.

...

この「実験」でわかることは,  $(x + y)^p$  の展開に現れる二項係数  ${}_p C_k$  ( $1 \leq k \leq p - 1$ ) が  $p$  の倍数であることが証明に効いているということである.

以上の考察を一般化することにより, 次の解答を得る.

解答  $p = 2$  の場合は簡単にわかるので、 $p$  は奇素数とする。二項定理により

$$\begin{aligned} (a + ib)^p &= \sum_{k=0}^p {}_p C_k a^{p-k} (ib)^k \\ &= \sum_{l=0}^{(p-1)/2} (-1)^l {}_p C_{2l} a^{p-2l} b^{2l} + i \sum_{l=0}^{(p-1)/2} (-1)^l {}_p C_{2l+1} a^{p-2l-1} b^{2l+1}. \end{aligned}$$

よって、 $(a + ib)^p$  が実数であると仮定すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(a + ib)^p &= \sum_{l=0}^{(p-1)/2} (-1)^l {}_p C_{2l+1} a^{p-2l-1} b^{2l+1} \\ &= \sum_{l=0}^{(p-3)/2} (-1)^l {}_p C_{2l+1} a^{p-2l-1} b^{2l+1} + (-1)^{(p-1)/2} b^p = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

となり、

$$(-1)^{(p-1)/2} b^{p-1} = - \sum_{l=0}^{(p-3)/2} (-1)^l {}_p C_{2l+1} a^{p-2l-1} b^{2l} \quad (13)$$

を得る。ここで、二項係数  ${}_p C_k$  ( $1 \leq k \leq p-1$ ) について、

$${}_p C_k = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1}$$

であり、右辺において  $p$  が素数であることから、 $2, 3, \dots, k-1, k$  はいずれも  $p$  を割りきらない。よって、 ${}_p C_k$  は  $p$  の倍数である（このことは、公式  ${}_p C_k = (p/k) {}_{p-1} C_{k-1}$  を用いて示すこともできる）。したがって、式 (13) より  $b^{p-1}$  は  $p$  の倍数であり、 $p$  が素数であることから  $b$  自身が  $p$  の倍数である。そこで、 $b = pm$  ( $m$  は整数) とおいて式 (12) に代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{(p-1)/2} (-1)^l {}_p C_{2l+1} a^{p-2l-1} p^{2l} m^{2l} &= pa^{p-1} + \sum_{l=1}^{(p-1)/2} (-1)^l {}_p C_{2l+1} p^{2l} a^{p-2l-1} m^{2l} = 0, \\ \therefore a^{p-1} &= p \sum_{l=1}^{(p-1)/2} (-1)^{l-1} p^{2(l-1)} {}_p C_{2l+1} a^{p-2l-1} m^{2l} \end{aligned}$$

を得る。よって、 $a^{p-1}$  は  $p$  の倍数であり、 $p$  が素数であることから  $a$  自身が  $p$  の倍数である。したがって、 $a, b$  双方が  $p$  の倍数となるが、これは  $a, b$  が互いに素であることに矛盾する。

(2015.4.6)

(2015年4月4日 7:17)

- 1).  $k$  を自然数とする。  $m$  を  $m = 2^k$  とおくと、  $0 < n < m$  を満たす全ての整数  $n$  について二項係数  ${}_m C_n$  は偶数であることを示せ。
- 2). 条件「 $0 \leq n \leq m$  を満たす全ての整数  $n$  について二項係数  ${}_m C_n$  は奇数である。」を満たす自然数  $m$  を求めよ。

(99 東大理系)

とことん二進数表示で考えてみる。二進数表示は、

$$a_l 2^l + a_{l-1} 2^{l-1} + \cdots + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0 \quad (a_l = 1, a_{l-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \text{ は } 0 \text{ または } 1)$$

の形の整数を  $[a_1 a_{l-1} \dots a_2 a_1 a_0]_2$  で表す, というふうにしておく. このとき, 次のことに注意する.

自然数  $N$  は奇数 (偶数)  $\iff N$  の二進数表示の一番下の桁が  $1(0)$  である.

第 1 問については,

$m = 2^k - 1$  としたとき, 二項係数  ${}_m C_n$  ( $0 \leq n \leq m$ ) すべてが奇数となる

を証明すればよい. これが成り立てば, 二項係数の公式  ${}_m C_n = {}_{m-1} C_{n-1} + {}_{m-1} C_n$  により問題の主張が証明されるからである. そして,  $m = 2^k - 1$  は二進法表示では  $\underbrace{[11 \dots 1]}_k$  と表されることに注意する.

まず, 具体的な  $m$  で二項係数を二進法表示を用いて計算してみる. 例えば,  $m = 15 = 2^4 - 1$  とする.  $n = 1$  に対しては,  ${}_{15} C_1 = 15$  は奇数である.  $n = 2$  に対しては,

$${}_{15} C_2 = \frac{15}{1} \cdot \frac{15-1}{2} = \frac{[1111]_2}{[1]_2} \cdot \frac{[1111]_2 - [1]_2}{[10]_2} = \frac{[1111]_2}{[1]_2} \cdot \frac{[1110]_2}{[10]_2}$$

となり, 最右辺の下線部で「約分」ができて,

$${}_{15} C_2 = \frac{[1111]_2}{[1]_2} \cdot \frac{[111]_2}{[1]_2} = \frac{\text{奇数}}{\text{奇数}} = \text{奇数}$$

を得る.  $n = 3$  に対しては,

$${}_{15} C_3 = {}_2 C_2 \cdot \frac{15-2}{3} = {}_{15} C_2 \cdot \frac{[1111]_2 - [10]_2}{[11]_2} = {}_{15} C_2 \cdot \frac{[1101]_2}{[11]_2} = \text{奇数}.$$

$n = 4$  に対しては,

$${}_{15} C_4 = {}_{15} C_3 \cdot \frac{15-3}{4} = {}_{15} C_3 \cdot \frac{[1111]_2 - [11]_2}{[100]_2} = {}_{15} C_3 \cdot \frac{[1100]_2}{[100]_2}$$

となって, 再び最右辺下線部で約分ができて,

$$= {}_{15} C_3 \cdot \frac{[11]_2}{[1]_2} = \text{奇数}$$

を得る. このようにして, すべての  ${}_{15} C_n$  ( $0 \leq n \leq 15$ ) は奇数であることがわかる.

以上の考察を一般化して, 次の解答を得る.

## 解答

1).  $m = 2^k - 1$  ( $k$  は自然数) のときすべての二項係数  ${}_m C_n$  ( $0 \leq n \leq m$ ) が奇数になることを証明すればよい. これを数学的帰納法により証明する.

${}_m C_0 = 1$  は奇数である. 偶数  $n (\leq m-3)$  に対して  ${}_m C_n$  が奇数であると仮定する. このとき,

$${}_m C_{n+1} = {}_m C_n \cdot \frac{m-n}{n+1} = {}_m C_n \times \frac{\text{奇数}}{\text{奇数}} = \text{奇数}$$

である. つぎに, 偶数  $n+2$  が二進数表示で  $[1 * \dots * 1 \underbrace{0 \dots 0}_p]_2$  と表されるとすると,

$${}_m C_{n+2} = {}_m C_{n+1} \cdot \frac{m-n-1}{n+2}$$



$$\begin{aligned}
& [11\dots 1]_2 - [1 * \dots * 1 \underbrace{0\dots 0}_p]_2 + [1]_2 \\
= {}_m C_{n+1} & \cdot \frac{[11\dots 1]_2 - [1 * \dots * 1 \underbrace{0\dots 0}_p]_2 + [1]_2}{[1 * \dots * 1 \underbrace{0\dots 0}_p]_2} \\
& [11\dots 1]_2 - [1 * \dots * 0 \underbrace{1\dots 1}_p]_2 \quad [1 * \dots * 1 \underbrace{0\dots 0}_p]_2 \\
= {}_m C_{n+1} & \cdot \frac{[11\dots 1]_2 - [1 * \dots * 0 \underbrace{1\dots 1}_p]_2}{[1 * \dots * 1 \underbrace{0\dots 0}_p]_2} = {}_m C_{n+1} \cdot \frac{[1 * \dots * 1 \underbrace{0\dots 0}_p]_2}{[1 * \dots * 1 \underbrace{0\dots 0}_p]_2}
\end{aligned}$$

となつて、最右辺で約分できて、

$$= {}_m C_{n+1} \cdot \frac{[1 * \dots * 1]_2}{[1 * \dots * 1]_2} = {}_m C_{n+1} \times \frac{\text{奇数}}{\text{奇数}} = \text{奇数}$$

を得る。以上により、 ${}_m C_0, {}_m C_1, \dots, {}_m C_{m-1}$  は奇数であることがわかる。最後に、 ${}_m C_m = 1$  は奇数である。

ゆえに、 $m = 2^k - 1$  に対し二項係数  ${}_m C_n$  ( $0 \leq n \leq m$ ) はすべて奇数である。

- 2). はじめに、偶数の  $m$  に対しては  ${}_m C_1 = m$  は偶数となつて題意を満たさないので、奇数の  $m$  のみ考えればよい。

すべての奇数  $m$  は、ある自然数  $k$  を用いて  $m = 2^k - 1$  (正の奇数) の形で表される。 $m = 2^k - 1$  の形の場合、前問の結果により、すべての二項係数  ${}_m C_n$  ( $0 \leq n \leq m$ ) は奇数である。 $m = 2^k - 1$  (1 以外の正の奇数) の場合は、 $m$  の二進法表示は  $[1 * \dots * 0 * \dots * 1]_2$  と 0 の桁を含むので、前問と同様の計算をしてみると、偶数になる二項係数  ${}_m C_n$  が現れる。実際、 $m = [1 * \dots * 0 \underbrace{1\dots 1}_q]_2$  であるとする、 $n = [1 \underbrace{0\dots 0}_q]_2$  に対し、

$$\begin{aligned}
{}_m C_n &= {}_m C_{n-1} \cdot \frac{[1 * \dots * 0 \underbrace{1\dots 1}_q]_2 - [1\dots 1]_2}{[1 \underbrace{0\dots 0}_q]_2} \\
&= {}_m C_{n-1} \cdot \frac{[1 * \dots * 0 \underbrace{0\dots 0}_q]_2}{[1 \underbrace{0\dots 0}_q]_2}
\end{aligned}$$

となり、最右辺で約分しても

$$= {}_m C_{n-1} \cdot \frac{[1 * \dots * 0]_2}{[1]_2}$$

となり、 $[1 * \dots * 0]_2$  は偶数なので右辺は偶数、よつて、 ${}_m C_n$  は偶数になってしまう。

ゆえに、題意を満たす自然数  $m$  は、 $m = 2^k - 1$  ( $k$  は自然数) の形のものに限る。

**追記** 今年 (2015 年) の東大入試 (理系・前期) に次の問題が出た。

${}_{2015} C_n$  が偶数となる整数  $n$  ( $1 \leq n \leq 2015$ ) で最小のものを求めよ。

この問題も上と同じ方針で解くことが出来る． 今の場合，  $m = 2015 = [11111011111]_2$  である（対称性がいいんですね）． 上と同様の計算をやっていくと，  $n = 1$  から  $n = 31 = [11111]_2$  までは  ${}_{2015}C_n$  は奇数となることがわかる． そして，  $n = 32 = [100000]_2$  のとき，

$$\begin{aligned} {}_{2015}C_{32} &= {}_{2015}C_{31} \cdot \frac{2015 - 31}{32} = {}_{2015}C_{31} \cdot \frac{[11111011111]_2 - [11111]_2}{[100000]_2} \\ &= {}_{2015}C_{31} \cdot \frac{[11111000000]_2}{[100000]_2} = {}_{2015}C_{31} \cdot \frac{[111110]_2}{[1]_2} \end{aligned}$$

となり，  ${}_{2015}C_{32}$  は偶数となる． ゆえに， 求める最小の  $n$  は 32 である．

(2015.4.5)

（数学問題 bot（個人用）@srinivasa1729 2015 年 3 月 18 日 17:34）

$m, n$  は自然数とする ( $m > n$ ) .

$$\text{「}m \text{ と } n \text{ は互いに素」} \iff \text{「}2^m - 1 \text{ と } 2^n - 1 \text{ は互いに素」}$$

を示せ.

(同志社)

$2^n - 1$  は二進法で  $111 \dots 1$  と表される数であるということを考えていたら， 次の解答を思いついた.

**解答** 二進法表示を採用する. すなわち，

$$a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \dots + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0 \quad (a_k = 1, a_{k-1}, \dots, a_0 \text{ は } 0 \text{ または } 1)$$

と表される整数を  $[a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0]_2$  と表すことにする. すると，  $2^n - 1$  は二進法表示では  $\underbrace{[11 \dots 1]_2}_{n \text{桁}}$

と表される. 二進法表示された整数の割り算を筆算で行うことを考えれば，

$$\begin{aligned} m \text{ を } n \text{ で割った余りが } r \text{ (} 0 \leq r < n \text{)} \text{ であることと, } \underbrace{[11 \dots 1]_2}_{m \text{桁}} \text{ を } \underbrace{[11 \dots 1]_2}_{n \text{桁}} \text{ で割った} \\ \text{余りが } \underbrace{[11 \dots 1]_2}_{r \text{桁}} \text{ (} 0 \leq r < n \text{)} \text{ となることが同値である} \end{aligned}$$

ことがわかる. よって， ユークリッドの互除法により，

$$\gcd(m, n) = d \iff \gcd(\underbrace{[11 \dots 1]_2}_{m \text{桁}}, \underbrace{[11 \dots 1]_2}_{n \text{桁}}) = \underbrace{[11 \dots 1]_2}_{d \text{桁}}$$

が成り立つ. ゆえに，

$$\begin{aligned} m \text{ と } n \text{ は互いに素} &\iff \gcd(m, n) = 1 \\ &\iff \gcd(\underbrace{[11 \dots 1]_2}_{m \text{桁}}, \underbrace{[11 \dots 1]_2}_{n \text{桁}}) = [1]_2 \\ &\iff \gcd(2^m - 1, 2^n - 1) = 1 \\ &\iff 2^m - 1 \text{ と } 2^n - 1 \text{ は互いに素} \end{aligned}$$

となり， 題意が証明された.

(2015.4.5)

(2015年3月27日 20:17) 1 から 10000 までの番号がついた電灯がある. 1 の倍数の電灯のスイッチを押し, 次に 2 の倍数のスイッチを押し, 次に 3 の倍数のスイッチを押し…と, これを 10000 回行った後, 点灯している電灯の数はいくつか. 初期状態で電球は消灯している.

(コマ大数学科第 12 回・改)

受験参考書「大学への数学 マスター・オブ・整数」(東京出版, 1998 年) の第 1 部 §1 に類題が載っているので, これをもとに解答をつくった.

**解答** 番号  $n$  の電灯のスイッチが押される回数は,  $n$  の約数の個数に等しい. 電灯が奇数回スイッチを押されれば最後に電灯が点灯しているのであるから, 約数の個数が奇数であるような  $n$  の数を求めればよい.

$n$  が  $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_s^{m_s}$  と素因数分解されるなら,  $n$  の約数の個数は  $(m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_s + 1)$  である. よって,

$$\begin{aligned} n \text{ の約数の個数は奇数個である} &\Leftrightarrow (m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_s + 1) \text{ は奇数である} \\ &\Leftrightarrow m_1, m_2, \dots, m_s \text{ はみな偶数である} \\ &\Leftrightarrow n \text{ は平方数である} \end{aligned}$$

これより, 最後に点灯している電灯は平方数の番号がついているものであり, それは  $1, 2, \dots, 10000$  の中に  $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, \dots, 100^2 = 10000$  の 100 個ある.

(2015.4.5)

(数学問題 bot (個人用) @srinivasa1729 2015 年 3 月 30 日 23:34)

$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\pi\sqrt{9n^2 + 2n + 1})|$  を求めよ.

(北大)

**解答**

$$\begin{aligned} \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n &= \frac{(9n^2 + 2n + 1) - (3n)^2}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} = \frac{2n + 1}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} \\ &= \frac{2 + n^{-1}}{\sqrt{9 + 2n^{-1} + 3n^{-2}} + 3} \rightarrow \frac{1}{3} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\sin(\pi\sqrt{9n^2 + 2n + 1})| &= |\sin(\pi\sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3\pi n)| \rightarrow \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (n \rightarrow \infty). \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\pi\sqrt{9n^2 + 2n + 1})| &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

(雪江明彦：整数論 1 初等整数論から  $p$  進数まで (日本評論社, 2013 年), 演習問題 1.5.6)  
 $n$  が正の整数で  $2^n + 1$  が素数なら,  $n$  は 2 のべきであることを証明せよ.

雪江氏の著書の巻末に載っている演習問題略解を見たら, 「略」とあった. そんな殺生なあ…著書を読んで簡単にできるような証明問題と思えないが, しばらく考えたら証明を思いついたので, ここに記しておく.

**解答**  $n$  が奇数 ( $> 1$ ) を約数に持たないことを示せばよい.

$n$  は奇数  $m (> 1)$  を約数に持つと仮定し,  $n = ma$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ) とおく.

$$x^m + 1 = (x + 1)(x^{m-1} - x^{m-2} + x^{m-3} - \cdots + x^2 - x + 1)$$

に  $x = 2^a$  を代入すれば,  $2^n + 1 = 2^{ma} + 1$  は  $2^a + 1$  を約数に持つことがわかる.  $m > 1$  より  $1 < 2^a + 1 < 2^{ma} + 1 = 2^n + 1$  であるので,  $2^n + 1$  は合成数になってしまい, 矛盾である.

(2015.4.4)

$n =$  奇素数の場合をチェックするのを忘れていた!

$n = p$  (奇素数) の場合,

$$2^p + 1 = (2 + 1)(2^{p-1} - 2^{p-2} + 2^{p-3} - \cdots - 2 + 1)$$

となり,  $3 = 2 + 1 < 2^p + 1$  により  $2^p + 1$  は合成数となり矛盾.

(2015.4.19)

(自作数学問題 bot@mathquestionakt2015 年 4 月 3 日 5:24)  
全ての自然数  $n$  について,  $n^5 - n$  が 10 の倍数となることを証明せよ.

**解答** 全ての自然数  $n$  について  $n^5 - n = n(n^4 - 1)$  が 2, 5 の倍数となることを示せばよい.

2 の倍数となることは簡単に示される.

5 の倍数になることについて.  $n$  が 5 で割り切れる場合は自明である.  $n$  が 5 で割り切れない場合, すなわち,  $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$  の場合は, フェルマーの小定理より  $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$  となるので,

$$n(n^4 - 1) \equiv n \cdot (1 - 1) = 0 \pmod{5}.$$

ゆえに,  $n(n^4 - 1)$  は 5 の倍数である.

(2015.4.3)

(数学問題 bot (個人用) @srinivasa1729 2015 年 3 月 31 日 8:34)  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{1/n}$  を求めよ.

(1988 年東工大)

解答

$$\begin{aligned}\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} &= \frac{3n(3n-1)\cdots(2n+1)/n!}{2n(2n-1)\cdots(n+1)/n!} = \frac{(2+1/n)(2+2/n)\cdots(2+(n-1)/n)(2+1)}{(1+1/n)(1+2/n)\cdots(1+(n-1)/n)(1+1)}, \\ \log\left(\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n}\right)^{1/n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log\left(2+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log\left(1+\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  とすると,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n}\right)^{1/n} &= \int_0^1 \log(2+x)dx - \int_0^1 \log(1+x)dx \\ &= \left[(2+x)\{\log(2+x)-1\}\right]_0^1 - \left[(1+x)\{\log(1+x)-1\}\right]_0^1 \\ &= \{3(\log 3-1) - 2(\log 2-1)\} - \{2(\log 2-1) - (-1)\} \\ &= (3\log 3 - 2\log 2 - 1) - (2\log 2 - 1) = 3\log 3.\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n}\right)^{1/n} = \exp(3\log 3) = 3^3 = 27.$$

(2015.4.3)

(自作数学問題 bot@mathquestionakt2015年4月2日 22:24) 以下の実数はある整数に等しい。その整数を答えよ。

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}.$$

解答  $u = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$ ,  $v = \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$  とおくと,

$$\begin{aligned}uv &= \sqrt[3]{343} = 7, \\ (u+v)^3 &= u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 90 + 21(u+v)\end{aligned}$$

により,

$$(u+v)^3 - 21(u+v) - 90 = (u+v-6)\{(u+v)^2 + 6(u+v) + 15\} = 0.$$

2次方程式  $x^2 + 6x + 15 = 0$  は実数解をもたないので,

$$u+v = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 6.$$

(2015.4.3)

(数学問題 bot@math\_uni\_bot 2015年4月2日 13:10)  $3^{2010}$  を 35 で割った余りを求めよ。

解答 まず、題意の数を 5,7 で割った余りを求める。フェルマーの小定理より  $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$  であるから、

$$\begin{aligned} 3^{2010} &= (3^4)^{502} \cdot 3^2 \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5}, \\ 3^{2010} &= (3^6)^{335} \equiv 1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

ところで、5,7 は互いに素であるから、中国剰余定理より、

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \quad (14)$$

を満たす整数  $x$  は  $5 \times 7 = 35$  を法としてただ一つだけ存在する。そのような整数のひとつとして 29 があるので、整数  $x$  が式 (14) を満たすならば  $x \equiv 29 \pmod{35}$  である。ゆえに、 $3^{2010} \equiv 29 \pmod{35}$ , すなわち、 $3^{2010}$  を 35 で割った余りは 29 である。

(2015.4.3)

(2015 年 3 月 30 日 1:17)  $xyz$  空間上の 3 点 A,B,C について、

- 1). A, B は原点を中心とする  $xy$  平面上の半径 1 の円周上にある。
- 2). C は  $z$  軸の正の部分にある。
- 3).  $\angle ACB = \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ) が成立。

四面体 OABC のうち最大の体積を  $V(\alpha)$  とし、 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha V(\alpha)$  を求めよ。

(08 東工大 AO)

解答 四面体 OABC は図 3 のようになる。 $\angle AOB = \beta$  とおくと、 $\alpha < \beta < \pi$  であり、

$$\begin{aligned} AB &= 2 \sin \frac{\beta}{2}, \quad AC = BC = \frac{AB/2}{\sin(\alpha/2)} = \frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2)}, \\ OC &= \sqrt{AC^2 - OA^2} = \frac{\sqrt{\sin^2(\beta/2) - \sin^2(\alpha/2)}}{\sin(\alpha/2)}, \\ (\text{四面体 OABC の体積}) &= \frac{1}{3} \times (\triangle OAB \text{ の面積}) \times OC \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2(\beta/2) - \sin^2(\alpha/2)}}{\sin(\alpha/2)}. \end{aligned}$$

右辺を  $A/(3 \sin(\alpha/2))$  とおく。

$$\begin{aligned} A^2 &= \left( \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \left( \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right)^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2}(1 - \cos \beta) - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \left( \frac{1}{2} \sin \beta \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} (\cos \alpha - \cos \beta)(1 - \cos^2 \beta). \end{aligned}$$

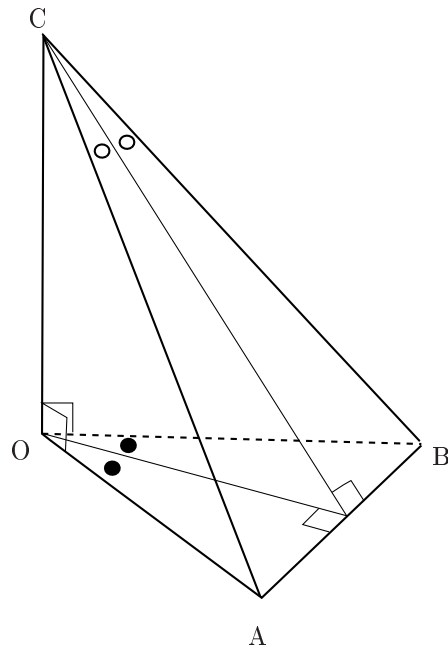


図 3: 四面体 OABC.  $\circ = \alpha/2$ ,  $\bullet = \beta/2$  である

$x = \cos \beta$  とおくと,  $-1 < x < \cos \alpha$  であり,

$$f(x) \equiv 8A = (\cos \alpha - x)(1 - x^2).$$

$x$  を動かした時の  $f(x)$  の増減を調べる.

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \cos \alpha \cdot x - 1$$

より,  $f'(x) = 0$  の解を

$$x_{\pm} = \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha + 3}}{3}$$

とすると,  $-1 < x_- < \cos \alpha < x_+$  であることが確かめられ,  $f(x)$  の増減表は下のようになる.

$x$	$(-1)$	$x_-$	$(\cos \alpha)$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$(0)$	$\nearrow$	$\searrow$ $(0)$

よって,  $f(x)$  は  $x = x_-$  で最大値を取る.

$$V(\alpha) = \frac{\sqrt{f(x_-)}}{6\sqrt{2} \sin(\alpha/2)}$$

となるから,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha V(\alpha) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin(\alpha/2)} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{f(x_-)}.$$

ここで,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin(\alpha/2)} = 2, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} x_- = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x_-) = \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{3} \right) \right\} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{3} \right)^2 \right\} = \frac{32}{27}$$

となるので,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha V(\alpha) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{9\sqrt{3}}.$$

(2015.3.31)

(2015年3月27日 6:17)

(前略) 2)  $\left(1 + \frac{2001}{2002}\right)^{2002/2001}$ ,  $\left(1 + \frac{2002}{2001}\right)^{2001/2002}$  の大小を比較せよ.

(02 名古屋・理)

2001,2002 の数字にあまりとらわれないこと.

**解答** 関数  $f(x) = \frac{1}{x} \log(1+x)$  ( $x > 0$ ) を考える.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \log(1+x) + \frac{1}{x(1+x)} = \frac{x - (1+x) \log(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

$g(x) = x - (1+x) \log(1+x)$  とおくと,

$$g'(x) = 1 - \log(1+x) - (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} = -\log(1+x) < 0 \quad (x > 0)$$

であるから,  $x > 0$  で  $g(x)$  は単調減少であり,  $g(x) < g(0) = 0$ . よって,  $x > 0$  で  $f'(x) < 0$  となり,  $f(x)$  は単調減少である. したがって,

$$\frac{2002}{2001} \log\left(1 + \frac{2001}{2002}\right) = f\left(\frac{2001}{2002}\right) > f\left(\frac{2002}{2001}\right) = \frac{2001}{2002} \log\left(1 + \frac{2002}{2001}\right).$$

両辺の指数関数をとって

$$\left(1 + \frac{2001}{2002}\right)^{2002/2001} > \left(1 + \frac{2002}{2001}\right)^{2001/2002}.$$

(2015.3.30)

(数学問題@sugakumondai 2015年3月2日 4:32)  $\sum_{k=1}^{40} {}_{40}C_k \cdot k^4$  の値を素因数分解せよ.

(2015.3.30)

$\sum_{k=0}^n {}_n C_k = 2^n$  を示すのと同じ要領である. とはいえ, 後半の計算が煩雑なので, 計算ミスしていないか正直自信なし.

**解答** 二項定理の公式

$$\sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k = (1+x)^n$$



の両辺を  $x$  で微分して,

$$\sum_{k=1}^n k {}_n C_k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

両辺に  $x = (1+x) - 1$  を掛けて,

$$\sum_{k=1}^n k {}_n C_k x^k = n\{(1+x) - 1\}(1+x)^{n-1} = n(1+x)^n - n(1+x)^{n-1}.$$

両辺を  $x$  で微分して,

$$\sum_{k=1}^n k^2 {}_n C_k x^{k-1} = n^2(1+x)^{n-1} - n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

両辺に  $x = (1+x) - 1$  を掛けて,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 {}_n C_k x^k &= n^2\{(1+x) - 1\}(1+x)^{n-1} - n(n-1)\{(1+x) - 1\}(1+x)^{n-2} \\ &= n^2(1+x)^n - n(2n-1)(1+x)^{n-1} + n(n-1)(1+x)^{n-2}. \end{aligned}$$

両辺を  $x$  で微分して,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 {}_n C_k x^{k-1} &= n^3(1+x)^{n-1} - n(n-1)(2n-1)(1+x)^{n-2} \\ &\quad + n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}. \end{aligned}$$

両辺に  $x = (1+x) - 1$  を掛けて,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 {}_n C_k x^k &= n^3\{(1+x) - 1\}(1+x)^{n-1} - n(n-1)(2n-1)\{(1+x) - 1\}(1+x)^{n-2} \\ &\quad + n(n-1)(n-2)\{(1+x) - 1\}(1+x)^{n-3} \\ &= n^3(1+x)^n - n(3n^2 - 3n + 1)(1+x)^{n-1} \\ &\quad + 3n(n-1)^2(1+x)^{n-2} - n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}. \end{aligned}$$

両辺を  $x$  で微分して,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^4 {}_n C_k x^{k-1} &= n^4(1+x)^{n-1} - n(n-1)(3n^2 - 3n + 1)(1+x)^{n-2} \\ &\quad + 3n(n-1)^2(n-2)(1+x)^{n-3} - n(n-1)(n-2)(n-3)(1+x)^{n-4}. \end{aligned}$$

$n = 40, x = 1$  を代入して,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{40} k^4 {}_{40} C_k &= 40^4 \cdot 2^{39} - 40 \cdot 39 \cdot (3 \cdot 40^2 - 3 \cdot 40 + 1) \cdot 2^{38} + 3 \cdot 40 \cdot 39^2 \cdot 38 \cdot 2^{37} \\ &\quad - 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 2^{36} \\ &= (2^3 \cdot 5)^4 \cdot 2^{39} - (2^3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 13) \cdot 4681 \cdot 2^{38} + 3 \cdot (2^3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 13)^2 \cdot (2 \cdot 19) \cdot 2^{37} \\ &\quad - (2^3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 13) \cdot (2 \cdot 19) \cdot 37 \cdot 2^{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{51} \cdot 5^4 - 2^{41} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 4681 + 2^{41} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13^2 \cdot 19 - 2^{40} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \\
&= 2^{51} \cdot 5^4 - 2^{41} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot (4681 - 3^2 \cdot 13 \cdot 19) - 2^{40} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \\
&= 2^{51} \cdot 5^4 - 2^{41} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 2458 - 2^{40} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \\
&= 2^{51} \cdot 5^4 - 2^{40} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot (2 \cdot 2458 + 19 \cdot 37) \\
&= 2^{51} \cdot 5^4 - 2^{40} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 5619 \\
&= 2^{40} \cdot 5 \cdot (2^{11} \cdot 5^3 - 3 \cdot 13 \cdot 5619) \\
&= 2^{40} \cdot 5 \cdot 36859 \\
&= 2^{40} \cdot 5 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41.
\end{aligned}$$

白状すると、最後の素因数分解  $36859 = 29 \cdot 31 \cdot 41$  は「数の帝国」というサイト <http://ja.numberempire.com/> に頼った。この素因数分解、手計算でどうやって行うのだろうか？

(2015.3.30)

(自作数学問題 bot@mathquestionakt 2015年3月27日 21:24)

$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  とする時、 $x^{12}$  の値を求めよ。

複素数の複素共役を考えるように、 $(1 + \sqrt{5})/2$  と  $(1 - \sqrt{5})/2$  をペアにして考える。

**解答**  $(1 \pm \sqrt{5})/2$  は 2 次方程式  $X^2 - X - 1 = 0$  の解であるので  $x = (1 + \sqrt{5})/2$  は  $x^2 - x - 1 = 0$ 、すなわち、 $x^2 = x + 1$  を満たす。

$$\begin{aligned}
x^4 &= (x^2)^2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1) + 2x + 1 = 3x + 2, \\
x^8 &= (x^4)^2 = (3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4 = 9(x + 1) + 12x + 4 = 21x + 13, \\
x^{12} &= x^4 \cdot x^8 = (3x + 2)(21x + 13) = 63x^2 + 81x + 26 \\
&= 63(x + 1) + 81x + 26 = 144x + 89 \\
&= 144 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 89 = 161 + 72\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

(2015.3.29)

(数学問題置き場@HimaginaryMp 2015年3月21日 16:12)

$l_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$  とする。  $l_{n+2} + l_n = \frac{1}{n+1}$  を示せ。

$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ ,  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$  の計算と発想は似ている。

**解答** 部分積分を用いると、

$$\begin{aligned}
l_{n+2} + l_n &= \int_0^{\pi/4} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \tan^n x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4} \tan^n x (\tan x)' dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \tan^n x \cdot \tan x \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\tan^n x)' \tan x dx \\
&= 1 - n \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1} x \cdot \tan x \frac{dx}{\cos^2 x} \\
&= 1 - n \int_0^{\pi/4} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx \\
&= 1 - n(l_{n+2} + l_n)
\end{aligned}$$

を得る. これを  $l_{n+2} + l_n$  について解いて,  $l_{n+2} + l_n = \frac{1}{n+1}$ .

(2015.3.29)

(2015年3月16日 10:17) 方程式

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin(nx) = 0 \quad \left( 0 < x \leq \frac{2\pi}{n} \right)$$

を解け.

(fujicategory 様)

大学理工系の数学の必修事項として「オイラーの公式」というものがある. これは, 純虚数に対する指数関数を

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

で定義するものである. 三角関数の加法定理を使えば, 指数法則

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

が成り立つことが示され, あたかも実数の指数関数と同様に扱えるのである. そして, ド・モアブルの公式はオイラーの公式を用いると

$$e^{inx} = (e^{ix})^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と表される. なお,  $\cos x, \sin x$  はオイラーの公式を用いれば

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

と表される.

**解答** オイラーの公式より  $\sin kx = \text{Im } e^{ikx}$  であるから,  $\sum_{k=1}^n e^{ikx}$  を計算して虚部をとれば,  $\sum_{k=1}^n \sin kx = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$  が得られる. ド・モアブルの公式を用いて,

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = \sum_{k=1}^n (e^{ix})^k = e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{i(n+1)x/2} \frac{e^{inx/2} - e^{-inx/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = e^{i(n+1)x/2} \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

この虚部をとって,

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \sin \left( \frac{n+1}{2} x \right) \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$$

を得る. これが 0 となるのは,

$$1) \quad \frac{nx}{2} = m\pi, \quad \text{すなわち,} \quad x = \frac{2m\pi}{n} \quad (m \text{ は整数}),$$

または,

$$2) \quad \frac{n+1}{2}x = m\pi, \quad \text{すなわち,} \quad x = \frac{2m\pi}{n+1} \quad (m \text{ は整数})$$

のときである.  $0 < x \leq 2\pi/n$  の範囲で 1) を満たす  $x$  は  $x = \frac{2\pi}{n}$ , 2) を満たす  $x$  は  $x = \frac{2\pi}{n+1}$  である. ゆえに, 求める解は

$$x = \frac{2\pi}{n+1}, \quad \frac{2\pi}{n}$$

である.

(2015.3.29)

(2015年3月26日 11:17) 四面体 ABCD は  $AB = 6$ ,  $BC = \sqrt{13}$ ,  $AD = BD = CD = CA = 5$  であると仮定する. (中略) 2) 四面体 ABCD の体積を求めよ.

(06 学習院・理)

どの面を底面として四面体の体積を求めるかが問題になるが, ここは正四面体である  $\triangle ACD$  を底面にとれば, 底面積の計算の手間が省けてよさそうである. ところで, 解答は意外と煩雑な計算となった. 正直言って私も答えに自信がないので, 途中の計算を細かく書いておく.

**解答** 四面体 ABCD の体積は, 正三角形である  $\triangle ACD$  を底面として計算することにする. 点 B から  $\triangle ACD$  に下ろした垂線の足を点 P とすれば (図 4 参照),

$$(\text{四面体 ABCD の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle ACD \text{ の面積}) \times BP$$

により求まる. 線分 BP の長さを求めるために, 辺 BD と点 P を含む平面と辺 AC とが交わる点を Q として (図 4 参照),  $\triangle BDQ$  について調べることにする.

$\triangle BDQ$  の一辺 BQ の長さを求める. 線分 BQ は線分 AC と直交することに注意すれば,  $CQ = x$  と置いて三平方の定理より,

$$\begin{aligned} BQ^2 &= BC^2 - CQ^2 = AB^2 - AQ^2, \quad (\sqrt{13})^2 - x^2 = 6^2 - (5-x)^2, \\ 13 - x^2 &= 36 - (25 - 10x + x^2), \quad 10x = 2 \quad \therefore \quad x = CQ = \frac{1}{5}, \\ BQ &= \sqrt{(\sqrt{13})^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{13 \cdot 5^2 - 1}{5^2}} = \frac{\sqrt{324}}{5} = \frac{\sqrt{3^2 \cdot 6^2}}{5} = \frac{18}{5}. \end{aligned}$$

$\triangle BDQ$  の残った一辺 DQ の長さを求める. 余弦定理より,

$$\begin{aligned} DQ^2 &= CD^2 + CQ^2 - 2CD \cdot CQ \cos \angle ACD \\ &= 5^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5^4 + 1 - 5^2}{5^2} = \frac{601}{5^2}, \end{aligned}$$

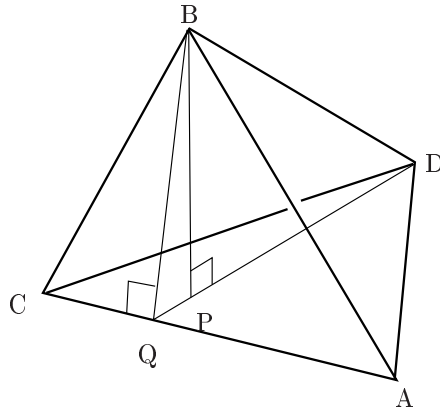


図 4: 四面体 ABCD

$$\therefore DQ = \frac{\sqrt{601}}{5}.$$

線分 BP の長さ（四面体の高さ）を求める．線分 BP が線分 DQ と直交していることに注意すれば， $PQ = y$  と置くと三平方の定理により，

$$\begin{aligned} BP^2 &= BQ^2 - PQ^2 = BD^2 - DP^2, \quad \left(\frac{18}{5}\right)^2 - y^2 = 5^2 - \left(\frac{\sqrt{601}}{5} - y\right)^2, \\ \frac{18^2}{5^2} - y^2 &= 5^2 - \left(\frac{601}{5^2} - \frac{2}{5}\sqrt{601}y + y^2\right), \\ \frac{2}{5}\sqrt{601}y &= \frac{18^2}{5^2} - 5^2 + \frac{601}{5^2} = \frac{324 - 625 + 601}{5^2} = \frac{300}{5^2} = 12 \\ \therefore y = PQ &= \frac{5}{2\sqrt{601}} \cdot 12 = \frac{30}{\sqrt{601}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BP &= \sqrt{BQ^2 - PQ^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - \frac{30^2}{601}} = \sqrt{\frac{18^2 \cdot 601 - 5^2 \cdot 30^2}{5^2 \cdot 601}} = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{6^2 \cdot 601 - 5^2 \cdot 10^2}{601}} \\ &= \frac{3}{5} \sqrt{\frac{21636 - 2500}{601}} = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{9136}{601}} = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{2^6 \cdot 143}{601}} = \frac{24}{5} \sqrt{\frac{143}{601}}. \end{aligned}$$

一方，正三角形 ACD の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} \sqrt{3} = \frac{25}{4} \sqrt{3}$$

である．ゆえに，四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot BP \cdot (\triangle ACD \text{ の面積}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{24}{5} \sqrt{\frac{143}{601}} \cdot \frac{25}{4} \sqrt{3} = 10 \sqrt{\frac{429}{601}}.$$

(2015.3.29)

(数学問題@sugakumondai 2015年3月1日 21:13) 19以上2007以下の自然数の中で、以下の条件1)~3)を満たす数の個数を求めよ。

- 1). 3で割ると2余る.
- 2). 5で割ると3余る.
- 3). 7で割ると2余る.

(07 京都高校生数学コンテスト)

この問題は、初等整数論の基本定理である「中国剰余定理」を用いる。

中国剰余定理

$m_1, m_2, \dots, m_s$  をどの二つも互いに素である整数とする。このとき、 $m_1$  で割ると  $b_1$  余り、 $m_2$  で割ると  $b_2$  余り、 $\dots$ 、 $m_s$  で割ると  $b_s$  余る整数が、 $M = m_1 m_2 \cdots m_s$  を法としてただひとつ存在する。すなわち、

$$\begin{aligned} x &\equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv b_2 \pmod{m_2} \\ &\dots \\ x &\equiv b_s \pmod{m_s} \end{aligned}$$

なる整数  $x$  は  $M$  を法としてただひとつ存在する。

**証明** 定理の整数  $x$  を具体的に構成する。 $M_1 = m_2 m_3 \cdots m_s$ ,  $M_2 = m_1 m_3 \cdots m_s$ ,  $M_s = m_1 m_2 \cdots m_{s-1}$  とおく。このとき、 $i = 1, 2, \dots, s$  に対し  $M_i f_i \equiv 1 \pmod{m_i}$  を満たす整数  $f_i$  が、 $m_i$  と  $M_i$  が互いに素であることから存在する<sup>2</sup>。そこで、

$$x = M_1 f_1 b_1 + M_2 f_2 b_2 + \cdots + M_s f_s b_s$$

とおくと、各  $i = 1, 2, \dots, s$  について、 $j \neq i$  なる  $j$  に対し  $M_j$  は  $m_i$  で割り切れるから  $M_j f_j b_j \equiv 0 \pmod{m_i}$  となり、 $x \equiv M_i f_i b_i \equiv b_i \pmod{m_i}$  が成り立つ。

(解の一意性)  $y$  も定理の連立方程式を満たす整数解  $x$  であるとして、 $y \equiv x \pmod{M}$  を満たすことを示せばよい。 $y \equiv x \pmod{m_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) であるから、 $y - x$  はどの二つも互いに素である  $m_1, m_2, \dots, m_s$  で割り切れ、結局、 $M = m_1 m_2 \cdots m_s$  で割り切れる、すなわち、 $y \equiv x \pmod{M}$  である。

**解答** 3, 5, 7 はどの二つも互いに素であるから、中国剰余定理により、題意を満たす整数  $x$  は  $3 \times 5 \times 7 = 105$  を法としてただひとつ存在する。まず、題意を満たす整数  $x$  をひとつ求める。

$$\begin{aligned} (5 \times 7) f_1 &\equiv 35 f_1 \equiv 1 \pmod{3} \\ (7 \times 3) f_2 &\equiv 21 f_2 \equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>一般に、 $a, b$  が互いに素である整数であるとき、 $ax + by = 1$  を満たす整数  $x, y$  が存在することがユークリッドの互除法によりわかるので、示される。

$$(3 \times 5)f_3 \equiv 15f_3 \equiv 1 \pmod{7}$$

を満たす  $f_1, f_2, f_3$  を求めると,  $f_1 = -1, f_2 = 1, f_3 = 1$  である. よって, 題意を満たす整数  $x$  として,

$$x = 35 \times (-1) \times 2 + 21 \times 1 \times 3 + 15 \times 1 \times 2 = 23$$

が得られる. したがって, 題意を満たす整数  $x$  は一般に  $x = 23 + 105m$  ( $m$  は整数) と表される. このような整数を  $19, \dots, 2007$  の中から探すと,  $23, 128 (= 23 + 105 \times 1), 233 (= 23 + 105 \times 2), \dots, 1913 (= 23 + 105 \times 18)$  の 19 個存在する.

(2015.3.28)

(数学問題 bot (個人用) @srinivasa1729 2015 年 3 月 21 日 2:34) 空間内に四面体 ABCD を考える. このとき, その頂点 A, B, C, D を同時に通る球面があることを示せ.

(2011 年京大理系)

四面体の 4 頂点のうち 3 頂点を通る円と残りの 1 頂点を含む球面の存在を言えばよい. 下記の解答のうち前半は記す必要があるのかしら?

### 解答

1. まず, 一直線上にない 3 点 A, B, C を通る円が存在することを示す. 3 点を含む平面上に  $(x, y)$ -座標平面をとる. このとき, 点 A が  $(-a, 0)$ , 点 B が  $(a, 0)$  ( $a > 0$  は定数) となるようにできる. そして, 点 C を  $(x_0, y_0)$  ( $y_0 \neq 0$ ) とする. 2 点  $(\pm a, 0)$  を通る円はその中心が  $y$  軸上にあるので, 円の方程式は  $x^2 + (y - s)^2 = s^2 + a^2$  ( $s$  は定数) と書ける. 点  $(x_0, y_0)$  がその円の上にあるとすると,

$$x_0^2 + (y_0 - s)^2 = s^2 + a^2 \quad \therefore \quad s = \frac{x_0^2 + y_0^2 - a^2}{2y_0}.$$

このように  $s$  をとれば, 上記の円は 3 点  $(\pm a, 0), (x_0, y_0)$  を通る. ゆえに, 3 点 A, B, C を通る円は存在する.

2. 四面体 ABCD の頂点のうち 3 頂点 A, B, C を通る円は, 3 点 A, B, C は一直線上にないので, 上記により存在する. その円を  $C_1$  とし, 半径を  $a$  とする.  $(x, y, z)$ -座標空間を, 円  $C_1$  が  $(x, y)$ -平面内に含まれ中心が原点  $O$  に一致するようにとる. 残る頂点 D を  $(x_0, y_0, z_0)$  ( $z_0 \neq 0$ ) とする. 円  $C_1$  を含む球面はその中心が  $z$ -軸上にあるので,  $x^2 + y^2 + (z - s)^2 = a^2 + s^2$  ( $s$  は定数) と書ける. 点  $D(x_0, y_0, z_0)$  がその球面の上にあるとすると,

$$x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - s)^2 = a^2 + s^2 \quad \therefore \quad s = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2}{2z_0}.$$

このように  $s$  をとれば, この球面は円  $C_1$  と点  $(x_0, y_0, z_0)$  を含む. 円  $C_1$  は 3 点 A, B, C を含むので, 四面体の 4 頂点 A, B, C, D を含む.

(2015.3.27)

(数学問題 bot (個人用) @srinivasa1729 2015年3月26日 2:34)  $n$  を 1 以上の整数とする.  
 $n$  次の  $x$  の多項式  $f(x)$  とその導関数  $f'(x)$  との間に  $nf(x) = (x+p)f'(x)$  という関係がある  
 とする. ( $p$  は定数) このとき,  $f(x)$  は定数  $a$  と  $p$  を用いて,  $f(x) = a(x+p)^n$  と書ける事を  
 示せ.

(1998 年阪大)

解答  $f(x)$  は  $n$  次多項式であるから,

$$f(x) = a_n(x+p)^n + a_{n-1}(x+p)^{n-1} + \cdots + a_1(x+p) + a_0 \quad (a_n(\neq 0), a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \text{ は定数})$$

と表せる. これを  $nf(x) = (x+p)f'(x)$  に代入して,

$$\begin{aligned} & na_n(x+p)^n + na_{n-1}(x+p)^{n-1} + na_{n-2}(x+p)^{n-2} + \cdots + na_1(x+p) + na_0 \\ &= na_n(x+p)^n + (n-1)a_{n-1}(x+p)^{n-1} + (n-2)a_{n-2}(x+p)^{n-2} + \cdots + a_1(x+p) \quad (15) \end{aligned}$$

を得る. 式 (15) 両辺の  $(x+p)$  の各べきの係数を比較する.  $(x+p)^n$  の係数を比較すると  $na_n = na_n$  となり, これは任意の  $a_n(\neq 0)$  に対して成立する. 次に,  $(x+p)^{n-1}$  の係数を比較すると  $na_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$  となり,  $a_{n-1} = 0$  を得る.  $(x+p)^{n-2}$  の係数を比較すると  $na_{n-2} = (n-2)a_{n-2}$  となり,  $a_{n-2} = 0$  を得る. 以下同様にして  $a_{n-3} = \cdots = a_0 = 0$  を得るので,  $f(x) = a_n(x+p)^n$  となる.

(2015.3.27)

(難問! 数学問題! 2015年3月25日 21:02)  $p$  が素数の時  $\sqrt{p}$  は無理数となる事を証明せよ.

(axjack\_様)

$\sqrt{2}$  が無理数であることの証明はよく知られているが, それを真似すればよい.

解答  $\sqrt{p}$  が有理数であると仮定して矛盾を導く.

$\sqrt{p}$  が有理数ならば  $\sqrt{p} = a/b$  と表される. ここで,  $a, b(\neq 0)$  は互いに素な整数である. 両辺を自乗して  $p = a^2/b^2$ ,  $a^2 = pb^2$ . よって,  $a^2$  は  $p$  の倍数となり,  $p$  が素数であることから  $a$  自身が  $p$  の倍数となる. そこで  $a = pm$  ( $m$  は整数) とおくと,

$$pb^2 = (pm)^2 = p^2m^2, \quad b^2 = pm^2.$$

よって,  $b^2$  は  $p$  の倍数となり,  $p$  が素数であることから  $b$  自身が  $p$  の倍数となる. 以上より,  $a, b$  はともに  $p$  の倍数となるが, これは  $a, b$  が互いに素と仮定したことに反する.

(2015.3.27)

(数学問題 bot (個人用) @srinivasa1729 2015年3月23日 2:34)  $f(x)$  は  $x^n$  の係数が 1 である  $x$  の  $n$  次式である. 相異なる  $n$  個の有理数  $q_1, \dots, q_n$  に対して  $f(q_1), \dots, f(q_n)$  がすべて有理数であれば,  $f(x)$  の係数はすべて有理数であることを数学的帰納法を用いて示せ.

(2002 年京大後期)



**解答**  $n=1$  の場合, 1 次式  $f(x) = x + a$  ( $a$  は定数) と有理数  $q_1$  に対して  $f(q_1)$  が有理数ならば  $a = f(q_1) - q_1$  は有理数となるので, 題意が成立する.

$n$  の場合に題意が成立すると仮定して,  $n+1$  の場合にも題意が成立することを示す.  $f(x)$  を  $x^{n+1}$  の係数が 1 の  $n+1$  次多項式として, 有理数  $q_1, \dots, q_{n+1}$  に対して  $f(q_1), \dots, f(q_{n+1})$  が有理数であるとする. このとき,  $n+1$  次多項式  $f(x) - f(q_{n+1})$  は因数定理により  $x - q_{n+1}$  で割り切れるので,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(q_{n+1})}{x - q_{n+1}}$$

は  $n$  次多項式であり  $x^n$  の係数は 1 である. そして,  $g(q_1), \dots, g(q_n)$  は有理数であるから, 帰納仮定により  $g(x)$  の係数はすべて有理数である. ゆえに,

$$f(x) = f(q_{n+1}) + (x - q_{n+1})g(x)$$

の係数はすべて有理数となる.

(2015.3.27)

(2015 年 3 月 25 日 21:17)  $n$  を自然数とするとき  $m \leq n$  で  $m$  と  $n$  の最大公約数が 1 となる自然数  $m$  の個数を  $f(n)$  とする. (中略) 2)  $p, q$  を互いに異なる素数とする. このとき  $f(pq)$  を求めよ.

(03 名古屋大)

本文の  $f(n)$  はオイラー関数と呼ばれる関数である.

**解答**  $pq$  以下の自然数  $m$  で  $m$  と  $pq$  の最大公約数が 1 であるものは,  $1, 2, \dots, pq$  から  $p$  または  $q$  の倍数

$$p, 2p, \dots, (q-1)p, q, 2q, \dots, (p-1)q, pq \tag{16}$$

を除いたものである. 式 (16) の数の個数は  $p+q-1$  であるから,

$$f(pq) = pq - (p+q-1) = (p-1)(q-1).$$

なお, 一般に自然数  $n$  が  $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$  と素因数分解されるとき,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}) \\ &= p_1^{n_1-1} p_2^{n_2-1} \dots p_s^{n_s-1} (p_1-1)(p_2-1) \dots (p_s-1) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) \end{aligned}$$

である.

(2015.3.27)

(2015 年 3 月 26 日 1:17)  $n$  を自然数とし,  $a_n = 4^{n+1} + 5^{2n-1}$  とする.  $a_n$  が 21 で割り切れることを示せ.

(09 静岡大)

“mod  $p$ ” の威力を感じざるを得ない.

解答  $a_n$  が 3 と 7 で割り切れることを示せばよい.

- (3 で割り切れること) “mod 3” で考えると,

$$4 \equiv 1 \pmod{3}, \quad 5 \equiv -1 \pmod{3}$$

であるから,

$$a_n \equiv 1^{n+1} + (-1)^{2n-1} = 1 - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

- (7 で割り切れること) “mod 7” で考えると,  $5 \equiv -2 \pmod{7}$  であるから,

$$a_n = 4^{n-1} \cdot 16 + 5^{2(n-1)} \cdot 5 \equiv 4^{n-1} \cdot 2 + (-2)^{2(n-1)} \cdot (-2) = 2(4^{n-1} - 4^{n-1}) = 0 \pmod{7}.$$

別解 “mod  $p$ ” を使わない解法. 数学的帰納法を用いる.

$a_1 = 21$  は 21 で割り切れる.  $a_n$  が 21 で割り切れると仮定する.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4^{n+2} + 5^{2n+1} = 4^{n+1} \cdot 4 + 5^{2n-1} \cdot 25 = 4^{n+1} \cdot 4 + 5^{2n-1} \cdot (4 + 21) \\ &= 4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21 \cdot 5^{2n-1} = 4a_n + 21 \cdot 5^{2n-1}. \end{aligned}$$

$a_n$  は 21 で割り切れるから,  $a_{n+1}$  も 21 で割り切れる.

(2015.3.27)

(2015 年 3 月 21 日 16:17)  $k = 1, 2, 3, \dots, 2011$  に対して  $F(k) = 2^k$  を満たす 2010 次関数  $F(x)$  について, 以下を求めよ.

$$1) F(2012) - 2^{2012} \quad 2) F(2013) - 2^{2013} \quad 3) F(0) \quad 4) F(-1)$$

(cruz\_F 様)

次のことを利用する.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  をどの 2 つも相異なる数として,  $n - 1$  次多項式  $f(x)$  が  $f(x_k) = y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) を満たすとき,  $f(x)$  は

$$f(x) = \sum_{k=1}^n y_k \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})(x_k-x_{k+2})\cdots(x_k-x_n)}$$

と表される.

これは「ラグランジュ補間」と呼ばれ, 関数の近似計算に利用される.

解答  $F(x)$  は次のように表される.

$$F(x) = \sum_{k=1}^{2011} 2^k L_k(x),$$

ここで,

$$\begin{aligned}
L_k(x) &= \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)(x-k-1)(x-k-2)\cdots(x-2011)}{(k-1)(k-2)\cdots 1 \cdot (-1)(-2)\cdots(k-2011)} \\
&= \frac{(-1)^{2011-k}}{(k-1)!(2011-k)!} (x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)(x-k-1)\cdots(x-2011) \\
&= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(2011-k)!} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-2011)}{x-k} \quad (k=1, 2, \dots, 2011).
\end{aligned}$$

1).  $k=1, 2, \dots, 2011$  に対し

$$L_k(2011) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(2011-k)!} \frac{(2011)!}{2012-k} = \frac{(-1)^{k-1}(2011)!}{(k-1)!(2012-k)!} = (-1)^{k-1} {}_{2011}C_{k-1}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
F(2012) &= 2 \sum_{k=1}^{2011} (-2)^{k-1} {}_{2011}C_{k-1} = 2 \sum_{k=0}^{2010} (-2)^k {}_{2011}C_k \\
&= 2 \left\{ \sum_{k=0}^{2011} (-2)^k {}_{2011}C_k - (-2)^{2011} \right\} \\
&= 2 \left[ \{1 + (-2)\}^{2011} - (-2)^{2011} \right] \\
&= 2 \{ (-1)^{2011} + 2^{2011} \} = -2 + 2^{2012}.
\end{aligned}$$

ゆえに,  $F(2012) - 2^{2012} = -2$ .

2).  $k=1, 2, \dots, 2011$  に対し

$$\begin{aligned}
L_k(2013) &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(2011-k)!} \frac{(2012)!}{2013-k} \\
&= (2012-k)(-1)^{k-1} \frac{(2012)!}{2013-k} \\
&= (-1)^{k-1} (2012-k) \frac{(2012)!}{(k-1)!(2013-k)!} \\
&= (-1)^{k-1} (2012-k) {}_{2012}C_{k-1}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
F(2013) &= 2 \sum_{k=1}^{2011} (-2)^{k-1} (2012-k) {}_{2012}C_{k-1} \\
&= 2 \sum_{k=0}^{2010} (-2)^k (2011-k) {}_{2012}C_k \\
&= 2 \cdot 2011 \sum_{k=0}^{2010} (-2)^k {}_{2012}C_k - 2 \sum_{k=0}^{2010} (-2)^k k {}_{2012}C_k. \tag{17}
\end{aligned}$$

(17) 最右辺第1項の和は

$$\sum_{k=0}^{2010} (-2)^k {}_{2012}C_k = \sum_{k=0}^{2012} (-2)^k {}_{2012}C_k - 2012(-2)^{2011} - (-2)^{2012}$$

$$\begin{aligned}
&= \{1 + (-2)\}^{2012} + 2012 \cdot 2^{2011} - 2^{2012} \\
&= (-1)^{2012} + 2012 \cdot 2^{2011} - 2^{2012} \\
&= 1 + 2012 \cdot 2^{2011} - 2^{2012}
\end{aligned}$$

と計算される. 第2項の和については,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k$$

を  $x$  について微分して得られる式

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k k x^{k-1}$$

を用いて計算する.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2010} (-2)^k k {}_{2012} C_k &= -2 \sum_{k=0}^{2010} (-2)^{k-1} k {}_{2012} C_k \\
&= -2 \left\{ \sum_{k=0}^{2012} (-2)^{k-1} k {}_{2012} C_k - 2011 \cdot 2012 (-2)^{2010} - 2012 (-2)^{2011} \right\} \\
&= -2 \cdot 2012 \{1 + (-2)\}^{2011} - 2011 \cdot 2012 (-2)^{2011} - 2012 (-2)^{2012} \\
&= 2 \cdot 2012 + 2011 \cdot 2012 \cdot 2^{2011} - 2012 \cdot 2^{2012}.
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
F(2013) &= 2 \cdot 2011 (1 + 2012 \cdot 2^{2011} - 2^{2012}) \\
&\quad - 2(2 \cdot 2012 + 2011 \cdot 2012 \cdot 2^{2011} - 2012 \cdot 2^{2012}) \\
&= 2(2011 - 2 \cdot 2012) + 2 \cdot 2^{2012} (2012 - 2011) \\
&= -4026 + 2^{2013},
\end{aligned}$$

$$\therefore F(2013) - 2^{2013} = -4026.$$

3).  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して,

$$\begin{aligned}
L_k(0) &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(2011-k)!} (-2)^{2010} \frac{(2011)!}{k} \\
&= (-1)^{k-1} \frac{(2011)!}{k!(2011-k)!} = (-1)^{k-1} {}_{2011} C_k
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
F(0) &= \sum_{k=1}^{2011} (-1)^k {}_{2011} C_k = \left[ \{1 + (-2)\}^{2011} - 1 \right] \\
&= - \{(-1)^{2011} - 1\} = 2.
\end{aligned}$$

4).  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$\begin{aligned} L_k(-1) &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(2011-k)!} (-2)(-3)\cdots(-k)(-k-2)(-k-3)\cdots(-2012) \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(2011-k)!} (-1)^{2010} \frac{(2012)!}{k} \\ &= (-1)^k \frac{(2012)!}{k!(2011-k)!} = 2012(-1)^k {}_{2011}C_k \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} F(-1) &= \sum_{k=1}^{2011} 2^k L_k(-1) \\ &= 2012 \sum_{k=1}^{2011} (-2)^k {}_{2011}C_k \\ &= 2012 \left\{ \sum_{k=0}^{2011} (-2)^k {}_{2011}C_k - 1 \right\} \\ &= 2012 [ \{1 + (-2)\}^{2011} - 1 ] \\ &= 2012 \cdot (-1 - 1) = -4024. \end{aligned}$$

(2015.3.25)

(2015年3月23日 4:17) 数列  $\{A_n\}$  は  $A_1 = 1$ ,  $n \geq 2$  に対して  $A_n$  は条件「 $A_n$  は  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  のどの項とも異なる」, 「 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  の中から重複なくどのように項を取り出してもそれらの和が  $A_n$  に等しくならない」を満たす最小自然数. この時  $A_n$  を  $n$  で表わせ.

(83 東大理系)

まずは, 小さい  $n$  で「実験」してみる. あとは, 2 のべき乗が現れたら二進数の利用を検討してみる.

解答

$$S_n^0 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}, \quad S_n = \{S_n^0 \text{ の重複しない元の和で表される数}\}$$

とおく. すると,  $A_{n+1}$  は  $S_n$  のどの元とも一致しない最小の自然数である.

$$S_1^0 = \{A_1\} = \{1\}, \quad S_1 = \{1\} \quad \text{より} \quad A_2 = 2.$$

$$S_2^0 = \{1, 2\}, \quad S_2 = \{1, 2, 3\} \quad \text{より} \quad A_3 = 4.$$

$$S_3^0 = \{1, 2, 4\}, \quad S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{より} \quad A_4 = 8.$$

$$S_4^0 = \{1, 2, 4, 8\}, \quad S_4 = \{1, 2, 3, 4, \dots, 15\} \quad \text{より} \quad A_5 = 16.$$

以上より,  $A_n = 2^{n-1}$  と推定される.

これを数学的帰納法により証明する.  $n = 1$  の場合正しいことはすでに示された.  $n$  の場合に正しいと仮定する. その時,  $S_n^0 = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$  である. ここで, 二進数表示を採用する.

すなわち、 $a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2 + a_0$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n$  は 0 または 1) と表される整数を  $(a_n \cdots a_1 a_0)_2$  と表すことにする (例えば、 $2 = (10)_2, 5 = (101)_2$ ) . すると、

$$S_n^0 = \{ (1)_2, (10)_2, (100)_2, \dots, \underbrace{(10 \cdots 0)_2}_{n \text{ 桁}} \}$$

となるので、

$$S_n = \{ \text{二進数でたかだか } n \text{ 桁で表される整数} \}$$

となり、

$$A_{n+1} = \underbrace{(10 \cdots 0)_2}_{n+1 \text{ 桁}} = 2^n$$

を得る. よって、 $n+1$  の場合も正しいことが示された.

ゆえに、 $A_n = 2^{n-1}$  である.

(2015.3.24)

(2015年3月22日 2:17) 白石 180 個と黒石 181 個、計 361 個の石が横に一直列に並んでいる。石がどう並んでいても、以下の条件を満たす黒の石が少なくとも一つあることを示せ。

「その黒の石とそれより右にある石をすべて除くと、残りは白黒同数となる。ただし、石が一つも残らない場合も同数とみなす。」

(01 東大文系)

361 個の石を右から一つずつ取り除いて、残った白石・黒石の個数がどう変化するかという「思考実験」を行う。あとは、論証力の勝負である (東大とはいえ文系受験生にこの問題を解かせたのか...) .

**解答** 361 個の石を右から一つずつ除去することを考える.  $k (= 1, 2, \dots, 361)$  回目の石除去のあと残っている黒石の数を  $b(k)$ , 白石の数を  $w(k)$  とする. ただし、 $b(0) = 181, w(0) = 180$  とする.  $b(k), w(k)$  は次の性質を満たす.

1.  $b(k), w(k)$  はともに単調減少である.
2.  $b(k-1) - b(k) = 0$  または 1,  $w(k-1) - w(k) = 0$  または 1.
3.  $b(k-1) - b(k) = 0$  のときは  $w(k-1) - w(k) = 1$ , そして、 $b(k-1) - b(k) = 1$  のときは  $w(k-1) - w(k) = 0$  である.
4.  $b(361) = w(361) = 0$ .

$b(k) = w(k)$  なる  $k$  は必ず存在する ( $b(361) = w(361) = 0$  であるから). そのような  $k$  で最小のものを  $k_0$  とすれば、 $k_0$  回目に除去する石は黒石であることが下記のように示される. そして、はじめに 361 個の石が並んでいる状態で、右から  $k_0$  番目の黒石およびその右側の石すべてを 361 個の石から除けば、残った黒石・白石は同数となる.

それでは、 $k_0$  回目に除去する石は黒石であること、すなわち、 $b(k_0-1) - b(k_0) = 1, w(k_0) - w(k_0-1) = 0$  であることを示す. もし、 $k_0$  回目に除去する石が白石であると仮定すると、 $b(k_0-1) <$

$w(k_0 - 1)$  である. 一方,  $b(0) = 181 > 180 = w(0)$  であるから,  $k_0$  回目の石除去までに  $b(k)$  と  $w(k)$  の大小関係の逆転が起こる. そして,  $b(k), w(k)$  に対する上記の性質から, ある  $k_1$  ( $1 \leq k_1 < k_0$ ) に対して  $b(k_1) = w(k_1)$  となる. これは,  $k_0$  の最小性に矛盾する. ゆえに,  $k_0$  回目に除去する石は黒石である.

(2015.3.23)

(2015年3月22日 21:17)  $11^{12^{13}}$  の十の位を求めよ.

(07 数オリ予選)

$11^{12^{13}}$  というビッグな数字に驚いて思考停止になりそうだが, 十の位だけ求めればよいので実はそんなに大変な計算にはならない.

**解答** まず,  $11^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) について考える. 二項定理より,

$$11^n = (10 + 1)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k 10^k = 1 + 10n + 100 \times (\text{整数})$$

となるので,

$$(11^n \text{ の十の位}) = (n \text{ の一の位})$$

である. よって,  $12^{13}$  の一の位を求めればよい.

$$(12^{13} \text{ の一の位}) = (2^{13} \text{ の一の位}) = 2.$$

ゆえに,  $11^{12^{13}}$  の十の位は 2 である.

(2015.3.23)

(2015年3月22日 12:17) サイコロを投げると 1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする. サイコロを  $n$  回 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 投げるとき, 出る目の積の 1 の位が  $j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, 9$ ) となる確率を  $P_n(j)$  とする. (中略) 4)  $P_n(5)$  を求めよ.

(09 名古屋・理)

いくつかの自然数の積の 1 の位が 5 となるのは,  $5 \times (\text{奇数})$  のパターンとなるときである.

**解答** いくつかの自然数の積の 1 の位が 5 となるのは, その自然数の中にひとつ以上 5 が含まれ, 他の自然数はみな奇数のときである. それを考えると, サイコロの出る目の積の 1 の位が 5 となるのは, 1 回以上 5 が出て, その他の回は 1 または 3 のときである. サイコロを  $n$  回投げて  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 回 5 が出て, その他は 1 または 3 が出る確率は,  ${}_n C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$  である. それを  $k = 1, 2, \dots, n$  について足し合わせると, 求める確率  $P_n(5)$  を得る. 二項定理を用いて,

$$\begin{aligned} P_n(5) &= \sum_{k=1}^n {}_n C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

(2015.3.23)

(2015年3月22日18:17)  $\frac{3}{p} + \frac{2}{q} = 1$  を満たす自然数の組  $(p, q)$  を全て求めよ.

(08 京都高校生数学コンテスト)

この種の問題では、解に不等式の制約条件をわざと課して解の範囲を絞り込むのが常套手段である。同様に、例えば  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  を満たす自然数の組  $(p, q, r)$  を求めることができる。

**解答**  $p \geq q$  とすると、 $1 = \frac{3}{p} + \frac{2}{q} \leq \frac{3}{q} + \frac{2}{q} = \frac{5}{q}$  より、 $q \leq 5$  である。この範囲で解  $(p, q)$  を探して、 $(p, q) = (9, 3), (6, 4), (5, 5)$  を得る。

$p < q$  とすると、 $1 = \frac{3}{p} + \frac{2}{q} < \frac{3}{p} + \frac{2}{p} = \frac{5}{p}$  より、 $p < 5$  である。この範囲で解  $(p, q)$  を探して  $(p, q) = (4, 8)$  を得る。

以上より、解は  $(p, q) = (4, 8), (5, 5), (6, 4), (9, 3)$  である。

(2015.3.23)

(2015年3月21日18:17) 自然数  $n$  に対して操作 F 「 $n$  が偶数ならば  $n$  を 2 で割る。  $n$  が奇数ならば  $n$  を 3 倍して 1 を加える。」を 10 回行う。10 回目で初めて 1 となる自然数を全て求めよ。

(07 京都高校生数学コンテスト)

「すべての自然数に対して操作 F を繰り返せばいつかは 1 に到達する」というのがコラッツ予想である。

**解答**

- 操作 A : もとの数を 3 倍して 1 を足す。
- 操作 B : もとの数を 2 で割る。

とする。操作 A または B を繰り返して 2 のべき乗  $2^n$  となれば、あとは

$$2^n \xrightarrow{B} 2^{n-1} \xrightarrow{B} 2^{n-2} \xrightarrow{B} \dots \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{B} 1$$

というふうに 1 に到達する。これより、10 回目に初めて 1 となる数としてまず  $2^{10} = 1024$  が見つかる。その他、10 回目で初めて 1 となるパターンとして、 $k (= 1, 2, \dots, 9)$  回目に操作 A を行って  $2^{10-k}$  となり、あとは操作 B を  $(10 - k)$  回行って 1 に到達する場合がある。 $k = 1, 2, \dots, 9$  各々についてこのようなパターンになる場合を探していく。その際、操作 A で数  $n$  になるには  $n$  を 3 で





(2015年3月20日 19:17)

1).  $x^3 - 63x + 162$  を因数分解せよ.

2). 整数  $a, b, c, d$  に対し複素数  $u = a + b\sqrt{3}i, v = c + d\sqrt{3}i$  が次の2つの等式

$$u^3 + v^3 = -162, \quad uv = 21$$

を満たす. このとき  $a, b, c, d$  を求めよ.

(00 信州大)

整数の問題と聞くと難しそうに思うが, この問題は誘導に従って解けばそんなに難しくない.

### 解答

1).  $f(x) = x^3 - 63x + 162$  とおくと  $f(3) = 0$  であるから, 因数定理により  $f(x)$  は  $x - 3$  で割り切れる.  $f(x)$  を  $x - 3$  で割り算することにより,

$$f(x) = (x - 3)(x^2 + 3x - 54) = (x - 3)(x - 6)(x + 9)$$

を得る.

2).

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = -162 + 63(u + v)$$

により, 前問の結果を用いて

$$(u + v)^3 - 63(u + v) + 162 = (u + v - 3)(u + v - 6)(u + v + 9) = 0,$$

$$\therefore u + v = 3, 6, -9.$$

- $u + v = 3$  のとき,  $u, v$  は方程式  $x^2 - 3x + 21 = 0$  の解である.  $x = \frac{3 \pm 5\sqrt{3}i}{6}$  となり,  $u = a + b\sqrt{3}i, v = c + d\sqrt{3}i$  ( $a, b, c, d$  は整数) の形とならない.
- $u + v = 6$  のとき,  $u, v$  は方程式  $x^2 - 6x + 21 = 0$  の解である.  $x = 3 \pm 2\sqrt{3}i$  より,  $(a, b, c, d) = (3, 2, 3, -2), (3, -2, 3, 2)$  を得る.
- $u + v = -9$  のとき,  $u, v$  は方程式  $x^2 + 9x + 21 = 0$  の解である.  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}$  となり,  $u = a + b\sqrt{3}i, v = c + d\sqrt{3}i$  ( $a, b, c, d$  は整数) の形とならない.

以上より, 求める整数の組は  $(a, b, c, d) = (3, 2, 3, -2), (3, -2, 3, 2)$  である.

(2015.3.21)

(2015年3月19日10:17) 半径3の球 $T_1$ と半径1の球 $T_2$ が、内接した状態で空間に固定されている。半径1の球 $S$ が次の条件A), B)を同時に満たしながら動く。 $S$ の中心が存在する範囲を $D$ とすると、立体 $D$ の体積を求めよ。

A).  $S$ は $T_1$ の内部にあるか $T_1$ に内接。

B).  $S$ は $T_2$ の外部にあるか $T_2$ に外接。

(10 大阪・理)

題意の立体はある平面図形の回転体と見抜くところがポイント。

解答 立体 $D$ は図5の影をつけた部分を $x$ 軸まわりに回転してできる。ただし、図において

$$C_1: x^2 + y^2 = 9, \quad C_2: (x-2)^2 + y^2 = 1,$$

$$C_3: x^2 + y^2 = 4 \ \& \ x \leq 1, \quad C_4: (x-2)^2 + y^2 = 4 \ \& \ x \leq 1$$

である。したがって、立体 $D$ の体積は

$$\pi \int_{-2}^1 (4-x^2)dx - \pi \int_0^1 \{4-(x-2)^2\}dx = \frac{22}{3}\pi$$

である。

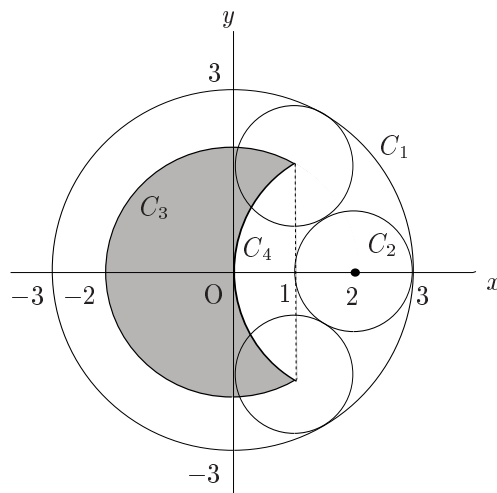


図 5: 立体 $D$ は影をつけた部分を $x$ 軸まわりに回転してできる

(2015.3.21)

(2015年3月15日 13:17)

1.  $a + b = c$  のとき,  $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$  を示せ.
2.  $a + b \geq c$  のとき,  $a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$  を示せ.

(09 東北)

第2問が意外と手こずった. 最後の式変形は, 自分が受験生の頃だったらすぐ思いついたかもしれない.

解答

1.

$$a^3 + b^3 + 3abc - c^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + 3abc - c^3 = 0.$$

2.

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + 3abc - c^3 \\ &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + 3abc - c^3 \\ &= (a + b)^3 - c^3 - 3ab(a + b - c) \\ &= (a + b - c)\{(a + b)^2 + c(a + b) + c^2 - 3ab\}. \end{aligned}$$

ここで,  $a + b - c \geq 0$ , そして

$$\begin{aligned} & (a + b)^2 + c(a + b) + c^2 - 3ab \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca \\ &= \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$a^3 + b^3 + 3abc - c^3 \geq 0.$$

(2015.3.21)

(2015年3月19日 18:17) 正  $n$  角形  $A$  ( $n \geq 5$ ) がある. 2 辺を  $A$  と共有するような三角形  $n$  個で囲まれてできる,  $A$  でない正  $n$  角形を  $B$  とする.  $(A$  の面積) $/$ ( $B$  の面積) を  $n$  の式で表せ.

(cruz\_F 様)

例えば  $n = 6$  の場合,  $A$  と  $B$  は図 6(a) のようになる (影をつけた部分が  $B$ ).

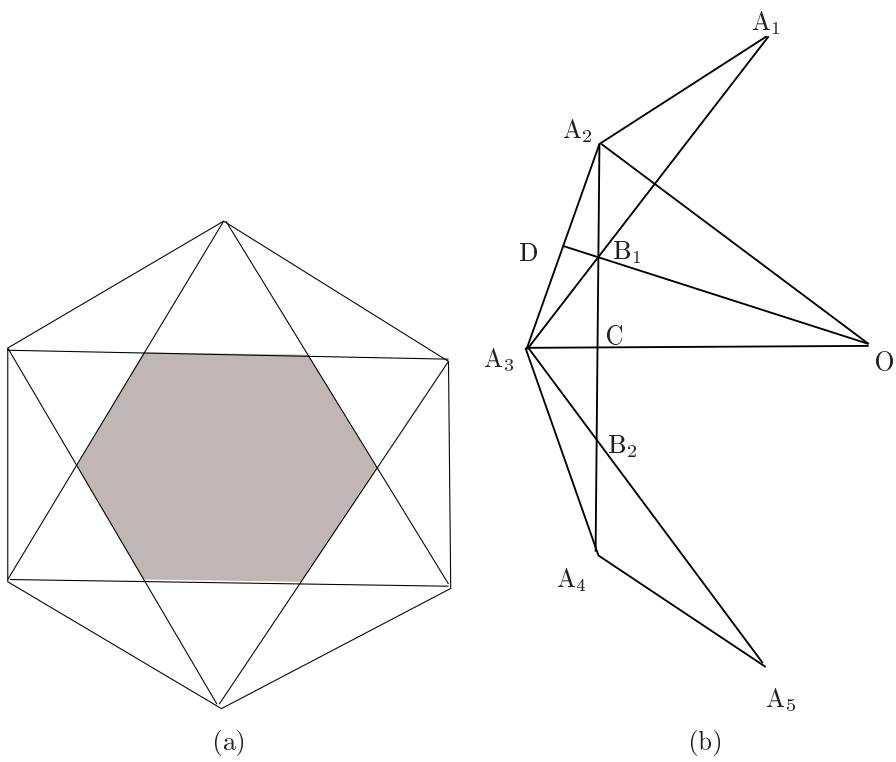


図 6: (a) 正  $n$  角形  $A, B$  ( $n = 6$ ), (b)  $A, B$  の辺の一部

**解答** 正  $n$  角形  $A, B$  の中心を点  $O$  とする.  $A$  の連続する 5 頂点を取り, それらを反時計回りに  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  とし, 線分  $A_1A_3, A_2A_4$  の交点を点  $B_1$ , 線分  $A_2A_4, A_3A_5$  の交点を点  $B_2$  とする. 点  $O$  から線分  $A_2A_4$  に垂線を下ろし, その足を点  $D$  とし, 垂線と線分  $B_1B_2$  との交点を点  $C$  とする (図 6(b) 参照). 正  $n$  角形の 1 辺の長さを  $a$  とする.

まず, 正  $n$  角形  $A$  の面積  $S_A$  は,

$$S_A = (\triangle OA_2D \text{ の面積}) \times 2n = \frac{1}{2}a \cdot OD \cdot 2n = \frac{1}{2}na^2 \cot \frac{\pi}{n}.$$

次に, 正  $n$  角形の面積を求める.  $n$  角形の内角の和は  $(n-2)\pi$  であるから,

$$\angle A_2A_3A_4 = \frac{(n-2)\pi}{n}, \quad \angle A_3A_2C = \frac{1}{2} \left( \pi - \frac{(n-2)\pi}{n} \right) = \frac{\pi}{n}.$$

よって, 正  $n$  角形  $B$  の一辺の長さ  $a'$  は,

$$\begin{aligned} \angle A_3B_1C &= \angle A_3A_2B_1 + \angle A_2A_3B_1 = \frac{2\pi}{n}, \\ A_3C &= A_2A_3 \cos \angle A_3A_2C = a \sin \frac{\pi}{n}, \\ B_1C &= A_2C \cdot \cot \frac{2\pi}{n} = a \sin \frac{\pi}{n} \cot \frac{2\pi}{n}, \\ \therefore a' &= 2 \cdot B_1C = 2a \sin \frac{\pi}{n} \cot \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

と求まる. したがって, 正  $n$  角形  $B$  の面積  $S_B$  は,  $A$  の面積と同様にして,

$$S_B = \frac{1}{2}na'^2 \cot \frac{\pi}{n} = 2na^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \cot^2 \frac{2\pi}{n} = na^2 \sin \frac{2\pi}{n} \cot^2 \frac{2\pi}{n}$$

と求まる. ゆえに,

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{\cot(\pi/n)}{2 \sin(2\pi/n) \cot^2(2\pi/n)} = \frac{\cos^2(\pi/n)}{\cos^2(2\pi/n)}.$$

(2015.3.20)

(2015 年 3 月 20 日 3:17)  $n$  を 3 以上の自然数とすると,

$$\sum_{k=3}^n {}_k C_3 = {}_{n+1} C_4$$

が成り立つことを示せ.

(06 学習院・経)

二項係数に関する基本的な公式を使うだけ.

**解答** 公式

$${}_n C_k = {}_{n-1} C_{k-1} + {}_{n-1} C_k$$

により,

$$\begin{aligned} {}_{n+1} C_4 &= {}_n C_3 + {}_n C_4 \\ &= {}_n C_3 + {}_{n-1} C_3 + {}_{n-1} C_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}_n C_3 + {}_{n-1} C_3 + {}_{n-2} C_3 + {}_{n-2} C_4 \\
&\quad \dots \\
&= {}_n C_3 + {}_{n-1} C_3 + {}_{n-2} C_3 + \dots + {}_4 C_3 + {}_4 C_4 \\
&= {}_n C_3 + {}_{n-1} C_3 + {}_{n-2} C_3 + \dots + {}_4 C_3 + {}_3 C_3.
\end{aligned}$$

最後に  ${}_k C_k = 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) を用いた.

(2015.3.20)

(数学問題@sugakumondai2015年3月2日15:24) 半径が  $\sqrt{3}$  である円形の時計の文字盤がある. 1,9,3時を示す点をそれぞれ A,B,C とし, 12,8,4時を示す点をそれぞれ D,E,F として  $\triangle ABC, \triangle DEF$  を作る. 二つの三角形の共通部分の面積を求めよ.

(第1回北海道高校数学コンテスト)

3つの角度が  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  の直角三角形がところどころ現れるので, それを利用する.

**解答** 状況は図7のとおり. BCとDEとの交点をP, BCとDFとの交点をQ, 点DからEFに垂線をおろしそれとBCとの交点をRとする. ABとDE,DR,DQとの交点をそれぞれS,T,Uとする. 図には,  $30^\circ$ の角に黒丸(●)を,  $60^\circ$ の角に白丸(o)をつけてある.

題意の部分の面積は, 正三角形DPQの面積から直角三角形DSUの面積を引けば求められる.  $\triangle DPQ$ の面積は,

$$\frac{1}{2}DR(PR + QR) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (1 + 1) = \sqrt{3}.$$

次に,  $\triangle DSU$ の面積を求める.

$$\begin{aligned}
RT &= BR \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 1, \quad DT = DR - RT = \sqrt{3} - 1, \\
DU &= \frac{\sqrt{3}}{2}DT = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - 1), \quad UT = \frac{1}{2}DT = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad SU = \sqrt{3}DU = \frac{3}{4}, \\
(\triangle DSU \text{の面積}) &= \frac{1}{2}DU \cdot SU = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}(\sqrt{3} - 1).
\end{aligned}$$

ゆえに, 題意の面積は

$$\sqrt{3} - \frac{9}{16}(\sqrt{3} - 1) = \frac{9 + 7\sqrt{3}}{16}.$$

(2015.3.20)

(難問! 数学問題! 2015年3月18日7:33) ある駅の待合室に  $n$  個の椅子が横一列に並んでいる.  $k$  人がどの2人も隣り合わないよう椅子に座る場合の数  $f(n, k)$  を求めよ. ただし  $n \geq 2k - 1$  とする.

(98 北大・理)

$n$  個から重複を許して  $k$  個を選ぶ場合の数の求め方と, ある意味発想が似ている.

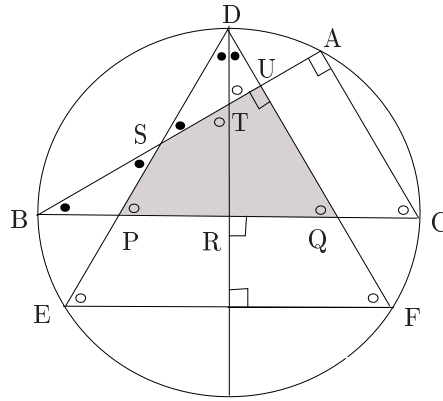


図 7: 時計盤

解答 まず,  $n$  個の椅子から  $k$  人の人を座らせる椅子を選ぶ場合の数を求める. 左から順に  $n_1, n_2, \dots, n_k$  番目の椅子に人を座らせるとすると, どの 2 人も隣り合わないから,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  は

$$\begin{aligned} 1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n, \\ n_2 - n_1 \geq 2, n_3 - n_2 \geq 2, \dots, n_k - n_{k-1} \geq 2 \end{aligned} \quad (18)$$

を満たす整数である. よって, 椅子の選び方の数は, (18) を満たす整数の組  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  の個数に等しい.

$$m_1 = n_1, m_2 = n_2 - 1, m_3 = n_3 - 2, \dots, m_k = n_k - k + 1$$

とおくと, 整数  $m_1, m_2, \dots, m_k$  は

$$\begin{aligned} 1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq n - k + 1, \\ m_2 - m_1 \geq 1, m_3 - m_2 \geq 1, \dots, m_k - m_{k-1} \geq 1 \end{aligned} \quad (19)$$

を満たす. (18) を満たす整数の組  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  と (19) を満たす整数の組  $(m_1, m_2, \dots, m_k)$  とは 1 対 1 に対応するから, 椅子の選び方の個数は (19) を満たす整数の組  $(m_1, m_2, \dots, m_k)$  の個数, すなわち,

$${}_{n-k+1}C_k = \frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k+1)!}$$

に等しい. そして, 椅子の選び方 1 つに対し,  $k$  人の人をどの順番に並べるかが  $k!$  通りある. ゆえに,

$$f(n, k) = \frac{(n-k+1)!}{k!(n-2k+1)!} \cdot k! = \frac{(n-k+1)!}{(n-2k+1)!}$$

である.

(2015.3.19)



(2015年3月17日 15:17)  $0 \leq x < 2\pi$  のとき関数

$$y = 2 \cos x \sin^2 x + 2 \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin x + \frac{2}{3} \cos x$$

について、(中略) 最大値を求めよ.

(09 関西大・文)

出典元の入試問題には誘導がついていたと思うが、それがないと意外と難しい. 文系の問題だから三角関数の微分は使わないと思っていたら、下記の解答を思いついた.

解答 題意の関数を  $f(x)$  とおくと、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(\sin x + \cos x) \left( \sin x \cos x + \frac{1}{3} \right), \\ \{f(x)\}^2 &= 4(1 + 2 \sin x \cos x) \left\{ (\sin x \cos x)^2 + \frac{2}{3} \sin x \cos x + \frac{1}{9} \right\} \\ &= 4(1 + \sin 2x) \left( \frac{1}{4} \sin^2 2x + \frac{1}{3} \sin 2x + \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{1}{9}(1 + \sin 2x)(9 \sin^2 2x + 12 \sin 2x + 4). \end{aligned}$$

$t = \sin 2x$  とおくと、 $x$  が  $0 \leq x < 2\pi$  の範囲を動くとき、 $t$  は  $-1 \leq t \leq 1$  の範囲を動く.

$$\begin{aligned} g(t) &\equiv 9\{f(x)\}^2 = (t+1)(9t^2 + 12t + 4), \\ g'(t) &= 27t^2 + 42t + 16 = (3t+2)(9t+8). \end{aligned}$$

$g(t)$  に対する増減表は次の通り.

$t$	-1	-8/9	-2/3	1		
$g'(t)$	+	0	-	0	+	
$g(t)$	0	↗	4/9	↘	↗	50

したがって、 $t = \sin 2x$  が  $-1 \leq t \leq 1$  の範囲を動くとき、 $0 \leq g(t) = 9\{f(x)\}^2 \leq 50$  となり、 $g(t)$  は  $t = \sin 2x = 1$  のとき最大値 50 をとる. よって、 $0 \leq x < 2\pi$  のとき  $-5\sqrt{2}/3 \leq f(x) \leq 5\sqrt{2}/3$  である.  $f(x) = 5\sqrt{2}/3$  となる  $x$  ( $0 \leq x < 2\pi$ ) が存在すれば  $5\sqrt{2}/3$  が  $f(x)$  の最大値となるのだが、 $t = \sin 2x = 1$  なる  $x$  の値、例えば  $x = \pi/4$  に対して  $f(x)$  を計算すると、 $f(\pi/4) = 5\sqrt{2}/3$  となる. ゆえに、 $f(x)$  の最大値は  $5\sqrt{2}/3$  である.

(2015.3.19)

(2015年3月18日) 平面上に半径1の円Cがある. この円Cの周上に定点Aを1つとり, 点Aを1つの頂点としてCに内接する正三角形, 正方形, 正六角形の内部領域をそれぞれT, S, Hで表す.

1. 領域  $T \cap S$  の面積を求めよ.
2. 領域  $S \cap H$  の面積を求めよ.

(tak0211\_lfuku 様)

まずは正確な図を描くこと.

### 解答

1. 円の中心を点Oとする. 正三角形Tの頂点を反時計回りにA, B, Cとし, 正方形Sの頂点を反時計回りにA, D, E, Fとする (図8(a) 参照). 求める面積は, 正方形Sの面積から図8(a)の  $S_1, S_2, S_3$  の面積を引いて求められる. 線分AB, DEの交点を点P, 点Eから線分BCに下ろした垂線の足を点Qとする.

$$(S \text{ の面積}) = (\sqrt{2})^2 = 2,$$

$$(S_1 \text{ の面積}) = (S_2 \text{ の面積})$$

$$= \frac{1}{2} \times AD \times DP$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$(S_3 \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (EQ)^2 \times 2 = EQ^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

( $S_3$  は直角二等辺三角形であることに注意).

$$\therefore (T \cap S \text{ の面積}) = 2 - 2 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{4}.$$

2. 円の中心を点Oとする. 正方形Sの4頂点を反時計回りに点A, B, C, Dとし, 正六角形Hの6頂点を反時計回りに点A, E, F, G, Hとする (図8(b) 参照). 線分OBと線分EFの交点を点P, 線分ABと線分EFの交点を点Q, 線分BCと線分EFの交点を点R, 線分ADと線分GHの交点を点S, 線分CDと線分GHの交点を点Tとする. 求める面積は, 正方形Sの面積から直角二等辺三角形BQR, DSTの面積を引けば求められる.

$$(S \text{ の面積}) = 2,$$

$$(\triangle BQR \text{ の面積}) = (\triangle DST \text{ の面積})$$

$$= \frac{1}{2} \times (BP)^2 \times 2 = (BP)^2$$

$$= (1 - \cos 30^\circ)^2 = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4}.$$

$$\therefore (S \cap H \text{ の面積}) = 2 - \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{4\sqrt{3} - 3}{2}.$$

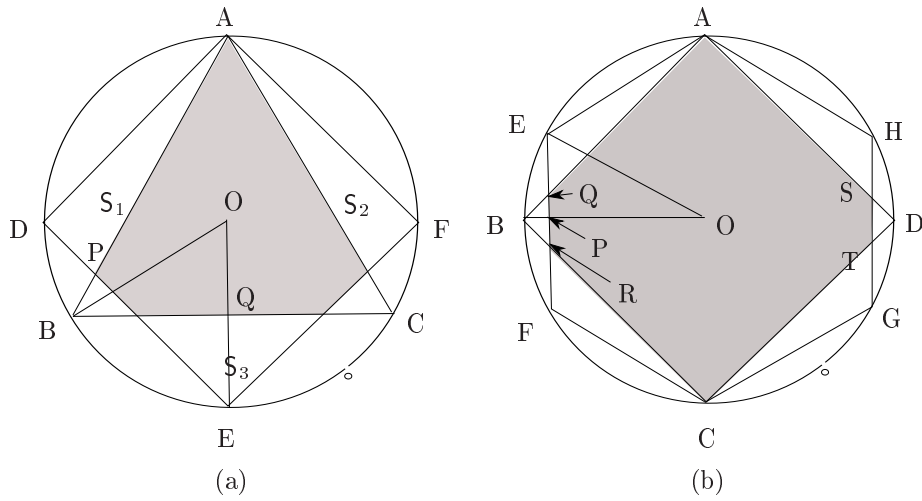


図 8: (a)  $T \cap S$ , (b)  $S \cap H$

(2015.3.19)

(2015年3月18日 3:17)  $x$  についての整式  $P(x)$  を二乗すると

$$\{P(x)\}^2 = x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + 4x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

となった. 整式  $P(x)$  を1つ求めよ.

(08 京都高校生数学コンテスト)

$P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  において係数比較をしようとする、大変なことになるそう...

解答  $f(x) \equiv \{P(x)\}^2$  を微分すると

$$\begin{aligned} 2g(x) &\equiv f'(x) = 2P(x)P'(x) \\ &= 2(5x^9 + 9x^8 + 12x^7 + 14x^6 + 15x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1). \end{aligned}$$

よって、 $f(x)$  と  $g(x)$  は  $P(x)$  を公約数にもつ. そして、 $g(x)$  は9次多項式で  $P(x)$  は5次多項式であることから、 $P(x)$  は  $f(x)$ ,  $g(x)$  の最大公約数  $\gcd\{f, g\}$  である.  $\gcd\{f, g\}$  をユークリッドの互除法で求める.

$5f(x)$  を  $g(x)$  で割って、

$$5f(x) = \left(x + \frac{1}{5}\right)g(x) + \frac{6}{5} \underbrace{(x^8 + 3x^7 + 6x^6 + 10x^5 + 10x^4 + 10x^3 + 9x^2 + 7x + 4)}_{r(x)}.$$

$g(x)$  を  $r(x)$  で割って、

$$g(x) = (5x - 6)r(x) + 25 \underbrace{(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}_{r_1(x)}.$$

$r(x)$  は  $r_1(x)$  で割り切れる. よって, ユークリッドの互除法により

$$\gcd\{f, g\} = \gcd\{g, r\} = \gcd\{r, r_1\} = r_1(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

$P(x)$  の最高次係数は  $\pm 1$ ,  $r_1(x)$  の最高次係数は  $1$  である. ゆえに,

$$P(x) = r_1(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

とすることができる.

(2015.3.18)

(2015年3月17日 19:17)  $P = 1^n + 2^n + 3^n$  を  $5$  で割った余りを  $R$  とする. (中略)  $2) n$  が自然数のとき,  $R$  の値を求めよ.

(第3回北海道高校数学コンテスト)

フェルマーの小定理より,  $2^4 \equiv 1, 3^4 \equiv 1 \pmod{5}$  であることはすぐわかる.

解答  $2^4 \equiv 1, 3^4 \equiv 1 \pmod{5}$  であるから,

- $n = 4k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) の場合,

$$P \equiv 1 + 1 + 1 = 3 \pmod{5}, \quad R = 3.$$

- $n = 4k + 1$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) の場合,

$$P \equiv 1 + 2 + 3 \equiv 1 \pmod{5}, \quad R = 1.$$

- $n = 4k + 2$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) の場合,

$$P \equiv 1 + 2^2 + 3^2 \equiv 4 \pmod{5}, \quad R = 4.$$

- $n = 4k + 3$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) の場合,

$$P \equiv 1 + 2^3 + 3^3 \equiv 1 \pmod{5}, \quad R = 1.$$

(2015.3.18)

(2015年3月15日 19:17)  $1^{2001} + 2^{2001} + 3^{2001} + \dots + 2000^{2001} + 2001^{2001}$  を  $13$  で割った時の余りを求めよ.

(01 数オリ予選)

もちろん, “mod 13” の計算を行う. その際, 次のフェルマーの小定理を使う.

フェルマーの小定理

$p$  を素数,  $a$  を  $p$  と互いに素である整数とすると,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

である.

解答 フェルマーの小定理より,  $a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$  ( $a = 1, 2, \dots, 12$ ) であり,

$$a^{2001} = a^{12 \times 166 + 9} = (a^{12})^{166} \cdot a^9 \equiv a^9 \pmod{13} \quad (a = 1, 2, \dots, 12).$$

次に,  $a = 1, 2, \dots, 12$  に対して  $a^9 \pmod{13}$  を調べる. 以下, “ $\pmod{13}$ ” を省略.

$$\begin{aligned} 1^9 &= 1; \\ 2^2 &= 4, 2^4 = (2^2)^2 = 4^2 = 16 \equiv 3, 2^8 = (2^4)^2 \equiv 3^2 = 9, 2^9 = 2^8 \cdot 2 \equiv 9 \cdot 2 = 18 \equiv 5; \\ 3^2 &= 9, 3^3 = 27 \equiv 1, 3^9 = (3^3)^3 \equiv 1; \\ 4^2 &= 16 \equiv 3, 4^4 = (4^2)^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv -4, 4^8 = (4^4)^2 \equiv (-4)^2 = 16 \equiv 3, \\ 4^9 &= 4^8 \cdot 4 \equiv 3 \cdot 4 = 12 \equiv -1; \\ 5^2 &= 25 \equiv -1, 5^8 = (5^2)^4 \equiv (-1)^4 = 1, 5^9 = 5^8 \cdot 5 \equiv 1 \cdot 5 = 5; \\ 6^2 &= 36 \equiv 10 \equiv -3, 6^4 = (6^2)^2 \equiv (-3)^2 = 9 \equiv -4, 6^8 = (6^4)^2 \equiv (-4)^2 = 16 \equiv 3, \\ 6^9 &= 6^8 \cdot 6 \equiv 3 \cdot 6 = 18 \equiv 5; \\ 7^2 &= 49 \equiv 10 \equiv -3, 7^4 = (7^2)^2 \equiv (-3)^2 = 9 \equiv -4, 7^8 = (7^4)^2 \equiv (-4)^2 = 16 \equiv 3, \\ 7^9 &= 7^8 \cdot 7 \equiv 3 \cdot 7 = 21 \equiv -5; \\ 8^2 &\equiv (-5)^2 = 25 \equiv -1, 8^8 = (8^2)^4 \equiv (-1)^4 = 1, 8^9 = 8^8 \cdot 8 \equiv 8 \equiv -5; \\ 9^2 &\equiv (-4)^2 = 16 \equiv 3, 9^4 = (9^2)^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv -4, 9^8 = (9^4)^2 \equiv (-4)^2 = 16 \equiv 3, \\ 9^9 &= 9^8 \cdot 9 \equiv 3 \cdot 9 = 27 \equiv 1; \\ 10^2 &\equiv (-3)^2 = 9 \equiv -4, 10^4 = (10^2)^2 \equiv (-4)^2 = 16 \equiv 3, 10^8 = (10^4)^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv -4, \\ 10^9 &= 10^8 \cdot 10 \equiv (-4) \cdot (-3) = 12 \equiv -1; \\ 11^2 &\equiv (-2)^2 = 4, 11^4 = (11^2)^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv 3, 11^8 = (11^4)^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv -4, \\ 11^9 &= 11^8 \cdot 11 \equiv (-4) \cdot (-2) = 8 \equiv -5; \\ 12^9 &\equiv (-1)^9 = -1; \\ 13^9 &\equiv 0 \end{aligned}$$

により,

$$\begin{aligned} 1^9 + 2^9 + \dots + 12^9 &\equiv 1^9 + 2^9 + \dots + 12^9 + 13^9 \\ &\equiv 1 + 5 + 1 + (-1) + 5 + 5 + (-5) + (-5) + 1 + (-1) + (-5) + (-1) = 0, \\ \therefore 1^{2001} + 2^{2001} + \dots + 12^{2001} &\equiv 1^{2001} + 2^{2001} + \dots + 12^{2001} + 13^{2001} \equiv 0. \end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned} &14^{2001} + 15^{2001} + \dots + 26^{2001} \\ &\equiv (13 + 1)^{2001} + (13 + 2)^{2001} + \dots + (13 + 13)^{2001} \\ &\equiv 1^{2001} + 2^{2001} + \dots + 13^{2001} \equiv 0, \\ &27^{2001} + 28^{2001} + \dots + 39^{2001} \\ &\equiv (13 \times 2 + 1)^{2001} + (13 \times 2 + 1)^{2001} + \dots + (13 \times 2 + 13)^{2001} \\ &\equiv 1^{2001} + 2^{2001} + \dots + 13^{2001} \equiv 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1990^{2001} + 1991^{2001} + \dots + 2001^{2001} \\
& \equiv (13 \times 153 + 1)^{2001} + (13 \times 153 + 2)^{2001} + \dots + (13 \times 153 + 12)^{2001} \\
& \equiv 1^{2001} + 2^{2001} + \dots + 12^{2001} \equiv 0.
\end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned}
& 1^{2001} + 2^{2001} + \dots + 2001^{2001} \\
& = (1^{2001} + 2^{2001} + \dots + 13^{2001}) + (14^{2001} + 2^{2001} + \dots + 26^{2001}) \\
& \quad + \dots + (1990^{2001} + 1991^{2001} + \dots + 2001^{2001}) \\
& \equiv 0 + 0 + \dots + 0 = 0.
\end{aligned}$$

ゆえに,  $1^{2001} + 2^{2001} + \dots + 2001^{2001}$  は 13 で割り切れる, すなわち, 13 で割った余りは 0 である.

(2015.3.17)

(2015 年 3 月 15 日 0:17) 次の 2 数の大きさを比較せよ.  $0.2, \tan(\pi/16)$ .

(esprit67 様)

$\tan(\pi/16)$  を既知の量と結びつける. それには,  $\tan$  の倍角の公式を用いる. 京大入試に「 $\tan 1^\circ$  は有理数か?」という問題があったことを思い出した.

**解答**  $\tan \alpha = 0.2 = 1/5$  とおく.  $0 < \tan \alpha = 1/5 < 1 = \tan(\pi/4)$  より  $0 < \alpha < \pi/4$  としてよい.  $\tan$  の倍角の公式より,

$$\begin{aligned}
\tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 1/5}{1 - (1/5)^2} = \frac{5}{12}, \\
\tan 4\alpha &= \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{2 \times (5/12)}{1 - (5/12)^2} = \frac{120}{119} > 1 = \tan \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

$0 < 4\alpha < \pi$  であることを考慮して,

$$4\alpha > \frac{\pi}{4}, \quad \alpha > \frac{\pi}{16}, \quad \therefore 0.2 = \tan \alpha > \tan \frac{\pi}{16}.$$

(2015.3.16)

(2015 年 3 月 15 日 23:17) 四角形 ABCD において三辺 BC, CD, DA の長さは等しく,  $\angle C = 90^\circ, \angle D = 150^\circ$  である. このとき  $\angle A, \angle B$  の大きさを求めよ.

(07 京都高校生数学コンテスト)

純粋な初等幾何の問題. カギは  $\angle D = 90^\circ + 60^\circ$  であること.

**解答** 辺 BD に点 A からおろした垂線の足を点 E, 点 D から直線 AE におろした垂線の足を点 F とする (図 9 参照).

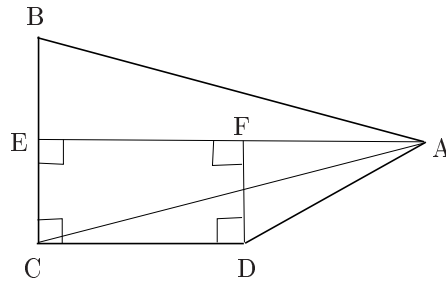


図 9: 四角形 ABCD

三角形 ACD は  $AD = CD$  なる二等辺三角形であるので,

$$\begin{aligned}\angle CAD = \angle ACD &= (180^\circ - \angle ADC) \div 2 = (180^\circ - 150^\circ) \div 2 = 15^\circ, \\ \angle ACE &= 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.\end{aligned}$$

三角形 ACE は  $\angle AEC = 90^\circ$  なる直角三角形であるから,

$$\angle CAE = 90^\circ - \angle ACE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

三角形 ADF は  $\angle AFD = 90^\circ$ ,  $\angle ADF = 60^\circ$  なる直角三角形であるから,

$$DF = \frac{DA}{2}, \quad CE = DF = \frac{DA}{2} = \frac{BC}{2}.$$

これより,  $CE = BE = BC/2$  であり, 三角形 ABE と三角形 ACE は  $\angle AEB = \angle AEC = 90^\circ$  なる合同な直角三角形である. よって,

$$\angle ABE = \angle ACE = 90^\circ - \angle CAE = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

であり, これが四角形 ABCD の  $\angle B$  の大きさである. したがって, 四角形 ABCE の  $\angle A$  の大きさは

$$360^\circ - \angle B - \angle C - \angle D = 360^\circ - 75^\circ - 90^\circ - 150^\circ = 45^\circ.$$

(2015.3.16)

(2015年3月15日16:17)  $n$  を自然数,  $P(x)$  を  $n$  次多項式とする.  $P(0), P(1), \dots, P(n)$  が整数ならば, すべての整数  $k$  に対して  $P(k)$  は整数であることを証明せよ.

(08 東工大 AO)

$n$  次多項式  $P(x)$  をどう表すか? 下記解答のように表すのは常套手段…らしい.

解答  $P(x)$  を次のように表す.

$$P(x) = a_n x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1) + a_{n-1} x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+2) +$$

$$\cdots + a_3x(x-1)(x-2) + a_2x(x-1) + a_1x + a_0 \quad (a_n, \dots, a_0 \text{ は実数定数}).$$

$P(0) = a_0$  は整数,  $P(1) = a_1 + a_0$  は整数だから  $a_1$  は整数,  $P(2) = 2!a_2 + 2a_1 + a_0$  は整数だから  $2!a_2$  は整数である. 以下同様にして,  $k = 0, 1, \dots, n$  に対し  $k!a_k$  は整数であることが言える. したがって,

$$P(x) = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k!} x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1), \quad b_0, b_1, \dots, b_n \text{ は整数}$$

と表せる. よって, 正の整数  $m$  に対し

$$P(m) = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k!} m(m-1)\cdots(m-k+1) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k {}_m C_k$$

となり,  $P(m)$  は整数である. 負の整数  $-m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) に対しては,

$$\begin{aligned} P(-m) &= b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k!} (-m)(-m-1)(-m-2)\cdots(-m-k+1) \\ &= b_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{b_k}{k!} m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1) \\ &= b_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k {}_{m+k-1} C_k \end{aligned}$$

となり,  $P(-m)$  は整数となる. ゆえに, すべての整数  $m$  に対し  $P(m)$  は整数となる.

(2015.3.16)

(2015年3月14日 19:17) 半径  $r$  の球 14 個を 1 段目に 9 個, 2 段目に 4 個, 3 段目に 1 個と  
いうように, ピラミッド状に積み上げた. このピラミッドの高さを求めよ.

(08 京都高校生数学コンテスト)

まず, 水平面上に置かれた 4 個の級の上に 1 個の球を乗せた状況を考え, 上の球の高さがどれだけになるか考える.

**解答** まず, 水平面上に 4 個の球を並べ, その上に 1 個の球を乗せた状況を考える (図 10 参照). 水平面上の 4 個の球の中心を点 A, B, C, D, 上の 1 個の球の中心を点 E とする. 四角形 ABCD は一辺の長さ  $2r$  の正方形となる. その正方形の中心を点 F とする. 点 E は点 F を通り 4 点 A, B, C, D を含む平面に垂直な直線の上にある. 点 E の正方形 ABCD からの高さは

$$EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{(2r)^2 - (\sqrt{2}r)^2} = \sqrt{2}r.$$

題意のピラミッドを作るには, 水平面上の 4 球のまわりにさらに 5 個の球を並べ, それらの上に 2 段目の球の残り 3 個を置き (図 10(b) 参照), 2 段目の 4 球の上に頂上の球を 1 個置いて作る. 図 10(b) において, 2 段目の球 T と水平面上の 4 球 P, Q, R, S との位置関係は, 上で述べたものと同様である. 2 段目の他の 3 球も同様. 2 段目の 4 球はひとつの水平面上にあり, その上に頂上の球を乗せるのだから, 頂上の 1 球と 2 段目の 4 球との位置関係も, 上で述べたものと同様である.



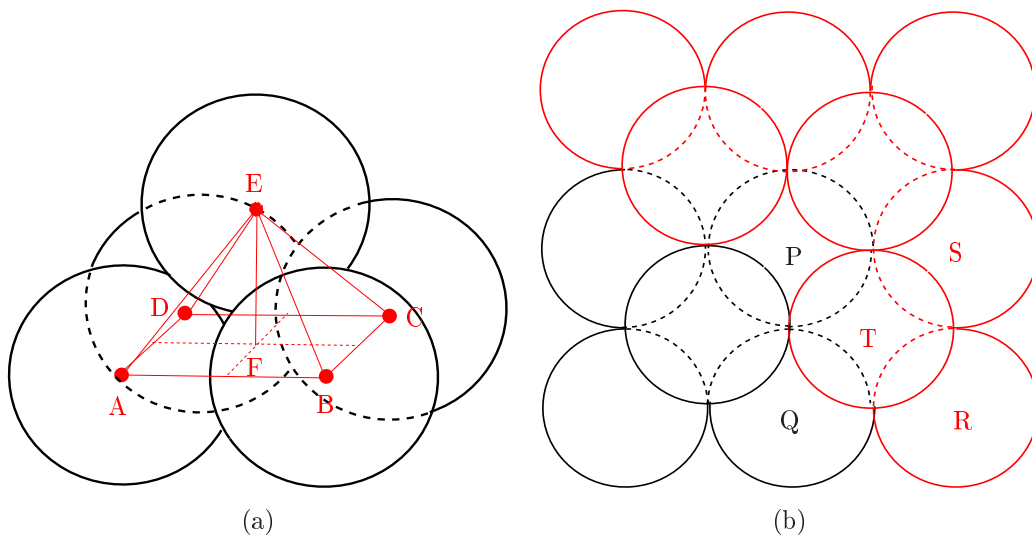


図 10: (a) 水平面上の 4 個の球の上に 1 個の球を乗せた状態, (b) 水平面上にさらに 5 個の球を並べ, その上に 2 段目の球を載せる (真上から見た図)

したがって, ピラミッドの高さは

$$r + \sqrt{2}r + \sqrt{2}r + r = 2(1 + \sqrt{2})r$$

である (頂上の球の一番上の点の高さをピラミッドの高さとするのかしら?) .

(2015.3.15, 2015.3.16 修正)

(2015 年 3 月 12 日 1:17) 円に内接する平行四辺形で長方形でないものは存在しないことを示せ.

(7mex 様)

初等幾何も復習しておこう.

**解答** 四角形 ABCD は平行四辺形で円に内接すると仮定する. 四角形は円に内接することから

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \quad \angle B + \angle D = 180^\circ.$$

四角形は平行四辺形であることから,

$$\angle A = \angle C, \quad \angle B = \angle D.$$

これらの式から

$$\angle A = \angle C = 90^\circ, \quad \angle B = \angle D = 90^\circ$$

を得る. ゆえに, 四角形 ABCD は長方形である.

(2015.3.14)

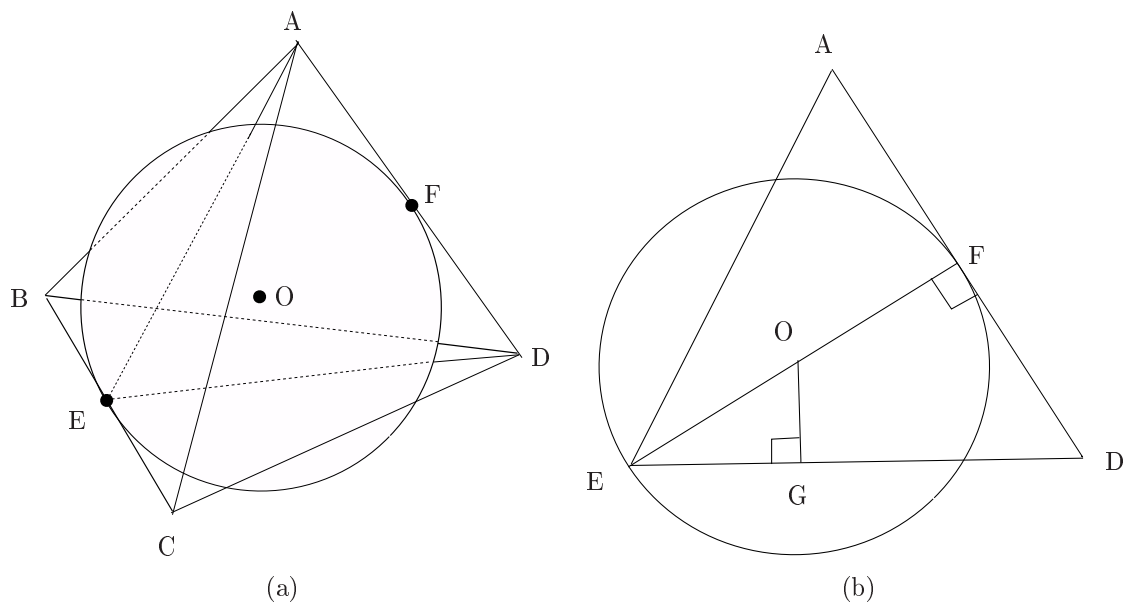


図 11: (a) 球  $S$  と四面体  $T$ , (b) 3 点  $A, D, E$  を含む平面で切った断面

(数学問題@sugakumondai2015年3月2日20:18) 正四面体  $T$  と半径 1 の球面  $S$  とがあって、 $T$  の 6 つの辺が全て  $S$  に接しているという。  $T$  の 1 辺の長さを求めよ。次に、  $T$  の外側にあって  $S$  の内側にある部分の体積を求めよ。

(82 東大理系)

状況を想像しにくいですが、球を四面体の各面などで切った断面はどうなるかと考えれば、状況をつかみやすくなる。あと、対称性を利用しているんな情報を得ること。

**解答** 状況は図 11(a) のようになっている。正四面体  $T$  の 4 頂点を  $A, B, C, D$  とし、辺  $BC$  と球面  $S$  との接点を  $E$ 、辺  $AD$  と球面  $S$  との接点を  $F$  とする。対称性より、球面  $S$  は正四面体  $T$  の各辺とその中点で接し、球  $S$  の中心  $O$  は 3 点  $A, D, E$  を含む平面の上にある。

正四面体  $T$  および球面  $S$  を 3 点  $A, D, E$  を含む平面で切った断面は、図 11(b) のようになる。正四面体  $T$  の 1 辺の長さを  $a$  とすると、 $AF = a/2$ 、 $AE = \sqrt{3}a/2$ 、 $EF = 2$ 。  $\triangle AEF$  が  $\angle F = \pi/2$  の直角三角形であることから、三平方の定理により

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2^2, \quad \therefore a = 2\sqrt{2}.$$

次に、球のうち正四面体  $T$  からはみ出ている部分の面積を求める。そのために、球の中心  $O$  と正四面体  $T$  の各面との間の距離を求める。図 11(b) において点  $O$  から直線  $ED$  に下ろした垂線の足を点  $G$  とすると、線分  $OG$  の長さが求める距離である。  $\triangle DEF$  と  $\triangle OGE$  が  $\angle F = \angle G = \pi/2$  なる相似な直角三角形であることに注意して、

$$OG = OE \times \frac{DF}{DE} = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

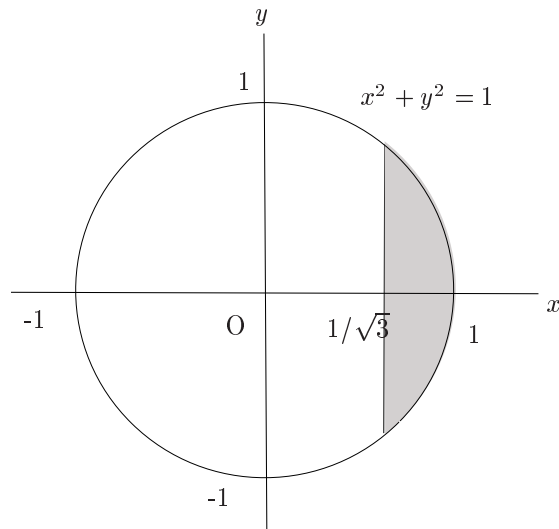


図 12: 球のうち正四面体からはみ出る部分

したがって、球のうち正四面体  $T$  の外にはみ出る部分とは、中心  $O$  からの距離が  $1/\sqrt{3}$  の平面で球を切ったとき、中心  $O$  と反対側の部分 4 個である。その体積は、図 12 において影をつけた部分を  $x$  軸を軸に回転して得られる回転体の体積の 4 倍である。したがって、求める体積は

$$V = 4 \times \pi \int_{1/\sqrt{3}}^1 (1 - x^2) dx = \frac{8\pi(9 - 4\sqrt{3})}{27}.$$

(2015.3.13)

(2015 年 3 月 7 日 19 : 17) 2 つの方程式  $x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 10x + 5 = 0$  と  $x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 15x + 5 = 0$  とをともに満たす実数  $x$  を全て求めよ。

(01 数オリ予選)

とりあえず題意の多項式を因数分解する。そのために、ふたつの多項式の最大公約数をユークリッドの互除法で計算する。

解答

$$P(x) = x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 15x + 5, \quad Q(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 10x + 5$$

とおいて、 $P(x), Q(x)$  それぞれを因数分解する。そのために、まず両者の最大公約数をユークリッドの互除法で求める。 $P(x)$  を  $Q(x)$  で割った余りは  $R(x) = x^3 - 5$ 。 $Q(x)$  は  $R(x)$  で割り切れる。ふたつの多項式  $f(x), g(x)$  の最大公約数を  $\gcd\{f, g\}$  と記すことにすれば、ユークリッドの互除法により

$$\gcd\{P, Q\} = \gcd\{Q, R\} = R(x) = x^3 - 5.$$

したがって、 $P(x), Q(x)$  はともに  $R(x)$  を因数にもつので、両者を  $R(x)$  で割り算して

$$P(x) = (x^3 - 5)(x^3 + 4x^2 + 3x - 1), \quad Q(x) = (x^3 - 5)(x^2 + 2x - 1)$$

を得る.

$P(x), Q(x)$  は  $x^3 - 5 = 0$  の実数解を共通の実数解に持つから、 $x^3 - 5 = 0$  の実数解を調べる.

$$x^3 - 5 = (x - \sqrt[3]{5})(x^2 + \sqrt[3]{5}x + \sqrt[3]{25})$$

であるから、 $x^3 - 5 = 0$  は  $x = \sqrt[3]{5}$  を実数解に持つ. 二次方程式  $x^2 + \sqrt[3]{5}x + \sqrt[3]{25} = 0$  については、(解の判別式)  $= (\sqrt[3]{5})^2 - 4\sqrt[3]{25} = -3\sqrt[3]{25} < 0$  となるので、実数解を持たない. よって、 $x^3 - 5 = 0$  の実数解は  $x = \sqrt[3]{5}$  のみである.

次に、 $x^3 + 4x^2 + 3x - 1 = 0$ ,  $x^2 + 2x - 1 = 0$  が共通の実数解を持つか調べる.  $x^3 + 4x^2 + 3x - 1$  を  $x^2 + 2x - 1$  で割ることにより、

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 1 = (x + 2)(x^2 + 2x - 1) + 1$$

が得られるので、このふたつの方程式は共通の実数解を持たない.

以上より、 $P(x) = 0$ ,  $Q(x) = 0$  の共通の実数解は  $x = \sqrt[3]{5}$  のみである.

(2015.3.12)

$P(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 10x + 3$  と  $Q(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 9x + 9$  の最大公約数と最小公倍数を求めよ.

(07 京都高校生数学コンテスト)

もちろん「ユークリッドの互除法」を使う. すなわち、 $a, b (\neq 0)$  を整数または多項式とするとき、 $a$  を  $b$  で割った余りが  $r$  ならば、 $(a, b \text{ の最大公約数}) = (b, r \text{ の最大公約数})$ .

**解答**  $P(x)$  を  $Q(x)$  で割った余りは  $R(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ ,  $Q(x)$  を  $R(x)$  で割った余りは  $R_1(x) = 11(x^2 + x + 3)$ ,  $R(x)$  を  $R_1(x)$  で割った余りは  $R_2(x) = 0$ , よって、 $R(x)$  は  $R_1(x)$  で割り切れる. 多項式  $f(x), g(x) (\neq 0)$  の最大公約数を  $\gcd\{f, g\}$  と記すことにすれば、ユークリッドの互除法により

$$G(x) \equiv \gcd\{P, Q\} = \gcd\{Q, R\} = \gcd\{R, R_1\} = x^2 + x + 3.$$

$P(x) = C(x)G(x)$ ,  $Q(x) = D(x)G(x)$  ( $C(x), D(x)$  は多項式) とおけば、 $P(x), Q(x)$  の最小公倍数は

$$P(x)D(x) = Q(x)C(x) = x^6 + 6x^5 + 18x^4 + 36x^3 + 44x^2 + 36x + 9.$$

(2015.3.11)

(数学問題 bot (個人用) @srinivasa1729) 正の数  $a, b, c$  が三角形の長さになるように動く.  
 $F = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$  とするとき、 $F$  の取りうる値を求めよ.

(2011 年東工大 AO)

$ab + bc + ca$  という式は扱いにくいので他の式に書き直す. あと、 $a \rightarrow pa, b \rightarrow pb, c \rightarrow pc$  ( $p$  は正の定数) としても  $F$  の値は変わらないので、例えば  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  とおくと問題が解きやすくなる.

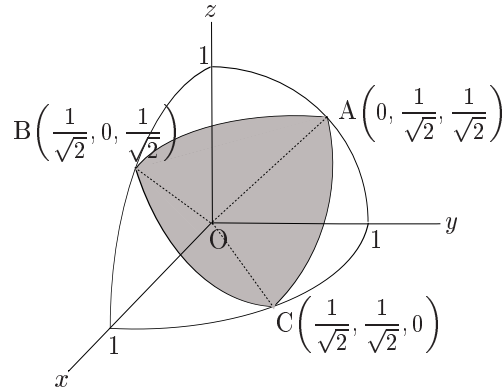


図 13: 条件 (20) を満たす点  $(x, y, z)$  全体がなす図形

解答

$$F^{-1} = \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 1 \right)$$

であるから,  $F$  の代わりに

$$G = \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

の取りうる値の範囲を求めることにする.  $a, b, c (> 0)$  が三角形の長さになるという条件は,

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b$$

である.

$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ,  $a = rx$ ,  $b = ry$ ,  $c = rz$  とおくと,  $G = (x + y + z)^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x + y > z$ ,  $y + z > x$ ,  $z + x > y$  である. したがって,  $x, y, z$  が条件

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{20}$$

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad x + y > z, \quad y + z > x, \quad z + x > y$$

を満たすとき  $G = (x + y + z)^2$  のとりうる値の範囲を求めればよい. 図形的に考えれば, 条件 (20) を満たす点  $(x, y, z)$  全体からなる図形と平面  $x + y + z = k$  が共有点を持つような  $k^2$  の値の範囲を求めることになる.

$1/8$  球  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ) と平面  $x + y = z$ ,  $y + z = x$ ,  $z + x = y$  との交線をそれぞれ円弧 AB, BC, CA とする (図 13 参照). 条件 (20) を満たす点  $(x, y, z)$  全体のなす図形は,  $1/8$  球面のうち 3 円弧 AB, BC, CA に囲まれる部分である (境界線は除く). 図形的考察から, 平面  $x + y + z = k$  が 3 点 A, B, C を通るとき  $k$  の値を  $k_1$ , 球  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  に接するとき  $k$  の値を  $k_2$  とすると,  $k$  のとりうる値の範囲は  $k_1 < k \leq k_2$  である.  $k_1 = \sqrt{2}$ ,  $k_2 = \sqrt{3}$  と求まるから,  $\sqrt{2} < k \leq \sqrt{3}$ , すなわち,  $2 < G = k^2 < 3$  である. ゆえに,  $1/2 < F^{-1} \leq 1$  となり,  $1 \leq F < 2$  である.

(2015.3.11)

実数  $x$  の小数部分を  $\langle x \rangle$  で表す. 有理数  $a$  に対し数列  $\{A_n\}$  を  $A_1 = \langle a \rangle$ ,  $A_{n+1} = \langle 1/A_n \rangle$  ( $A_n = 0$  のとき  $A_{n+1} = 0$ ) とする. (中略) 3)  $a$  を整数  $p$  と自然数  $q$  を用いて  $a = p/q$  と表すとき,  $q$  以上の全ての自然数  $n$  に対して  $A_n = 0$  となることを示せ.

(11 東大理系)

整数の分野においては, 次の事実と「ユークリッドの互除法」が基本的である: 整数  $p$  を整数  $q > 0$  で割った商を  $a$ , 余りを  $r$  とすれば,

$$p = qa + r, \quad 0 \leq r < q.$$

解答  $p$  を  $q$  で割った商を  $\alpha$ , 余りを  $r$  とすれば,

$$\frac{p}{q} = \alpha + \frac{r}{q}, \quad 0 \leq r < q \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{r}{q}.$$

$q$  を  $r$  で割った商を  $\alpha_1$ , 余りを  $r_1$  とすれば,

$$\frac{1}{A_1} = \frac{q}{r} = \alpha_1 + \frac{r_1}{r}, \quad 0 \leq r_1 < r, \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{r_1}{r}.$$

$r$  を  $r_1$  で割った商を  $\alpha_2$ , 余りを  $r_2$  とすれば,

$$\frac{1}{A_2} = \frac{r}{r_1} = \alpha_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leq r_2 < r_1, \quad \rightarrow \quad A_3 = \frac{r_2}{r_1}.$$

$r_1$  を  $r_2$  で割った余りを  $\alpha_3$ , 余りを  $r_3$  とすれば,

$$\frac{1}{A_3} = \frac{r_1}{r_2} = \alpha_3 + \frac{r_3}{r_2}, \quad 0 \leq r_3 < r_2, \quad \rightarrow \quad A_4 = \frac{r_3}{r_2}.$$

以下同様にして  $\alpha_n, r_n$  を生成していけば,  $r_n$  は

$$0 \leq \cdots < r_n < \cdots < r_2 < r_1 < r < q \quad (21)$$

を満たし,  $A_n = r_{n-1}/r_{n-2}$  と表される (ただし,  $r_0 = r, r_{-1} = q$ ).  $\{r_n\}$  は不等式 (21) を満たす整数列であるから, ある整数  $k$  ( $0 < k \leq q-1$ ) に対し  $r_k = r_{k+1} = \cdots = 0$  となる.  $A_n = r_{n-1}/r_{n-2}$  より  $A_{k+1} = A_{k+2} = \cdots = 0$ ,  $q \geq k+1$  より  $A_q = A_{q+1} = \cdots = 0$  となる.

(2015.3.10)

3 辺の長さが  $a, b, c$  の直方体を, 長さが  $b$  の 1 辺を回転軸として  $90^\circ$  回転させる時, 直方体が通過する点全体が作る立体を  $V$  とする. (中略)  $a + b + c = 1$  のとき,  $V$  のとりうる値の範囲を求めよ.

(10 東大理系)

$V$  は立体の体積のことか? 2 変数関数  $f(x, y)$  の最大値・最小値を求める問題は, まず一方の変数  $y$  を固定して  $x$  を動かした時の最大値・最小値を  $y$  で表す. その次に  $y$  を動かして,  $y$  で表された最大値・最小値がどの範囲を動くか求める. この問題の場合, 「2 変数」をどう選ぶかもポイント.

**解答** 題意の立体を回転軸に垂直な平面で切った時の断面は図14 のようになる．よって，立体の体積は

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{4}b(a^2 + c^2) + abc = b \left\{ \frac{\pi}{4}(a^2 + c^2) + ac \right\} \\ &= b \left[ \frac{\pi}{4}\{(a + c)^2 - 2ac\} + ac \right] \\ &= b \left\{ \frac{\pi}{4}(1 - b)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) a(1 - b - a) \right\} \end{aligned}$$

となる．

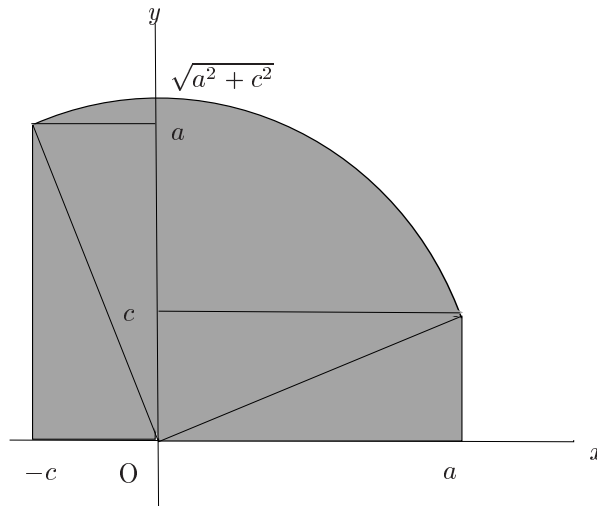


図 14: 立体を回転軸に垂直な平面で切った時の断面

まず， $b$  ( $0 < b < 1$ ) を固定して  $a$  を動かして， $V$  のとりうる値の範囲を  $b$  を用いて表す． $a$  の動く範囲は  $0 < a < 1 - b$  であるから，

$$0 < a(1 - b - a) \leq \frac{(1 - b)^2}{4}$$

よって，

$$b \left\{ \frac{\pi}{4}(1 - b^2) - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) (1 - b^2) \right\} = \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right) b(1 - b)^2 \leq V < \frac{\pi}{4}b(1 - b)^2$$

である．

次に， $b$  ( $0 < b < 1$ ) を動かして， $V$  のとりうる値の範囲を調べる． $f(b) = b(1 - b)^2$  に対し，導関数  $f'(b) = 1 - 4b + 3b^2 = (1 - b)(1 - 3b)$  を用いて  $f(b)$  ( $0 < b < 1$ ) の値の変化を調べると，下記の表のようになる．

$b$	(0)	1/3	(1)		
$f'(b)$		+	0	-	
$f(b)$	(0)	↗	4/27	↘	(0)

したがって， $V$  のとりうる値の範囲は

$$0 < V < \frac{4}{27} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{27}$$

である．

(2015.3.10)

(数学問題@sugakumondai) 単位円に内接する正  $n$  角形のある 1 つの頂点から他の頂点までの距離の積が  $n$  であることを証明せよ.

(tsatie 様)

この問題は複素数を使って考える. 複素数を使うと, 平面図形の問題が複素数の計算の問題に言い換えられる.

**解答** 複素平面に単位円  $|z| = 1$  を取ると, その単位円に内接する正  $n$  角形の頂点として

$$\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (22)$$

がある<sup>3</sup>. よって,

$$\begin{aligned} & \left| 1 - \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) \right| \left| 1 - \left( \cos \frac{2\pi \cdot 2}{n} + i \sin \frac{2\pi \cdot 2}{n} \right) \right| \cdots \\ & \cdots \left| 1 - \left( \cos \frac{2\pi(n-1)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n-1)}{n} \right) \right| = n \quad (23) \end{aligned}$$

を示せばよい. ド・モアブルの公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を用いれば, 式 (22) の点は  $z$  についての方程式  $z^n - 1 = 0$  のどのふたつも相異なる  $n$  個の解であることがわかるから,  $z^n - 1$  は

$$\begin{aligned} z^n - 1 = (z - 1) & \left\{ z - \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) \right\} \left\{ z - \left( \cos \frac{2\pi \cdot 2}{n} + i \sin \frac{2\pi \cdot 2}{n} \right) \right\} \cdots \\ & \cdots \left\{ z - \left( \cos \frac{2\pi(n-1)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n-1)}{n} \right) \right\} \end{aligned}$$

と因数分解される. この両辺を  $(z - 1)$  で割って,

$$\begin{aligned} z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = & \left\{ z - \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) \right\} \left\{ z - \left( \cos \frac{2\pi \cdot 2}{n} + i \sin \frac{2\pi \cdot 2}{n} \right) \right\} \cdots \\ & \cdots \left\{ z - \left( \cos \frac{2\pi(n-1)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n-1)}{n} \right) \right\}. \end{aligned}$$

両辺の絶対値をとり  $z \rightarrow 1$  とすれば, (23) を得る.

(2015.3.9)

(前略) 2)  $P = \sqrt[3]{49} - 3\sqrt[3]{7} + 2$  の正負を判定せよ. 3)  $P$  に実数を掛けて整数にしたい. 掛けるべき実数と整数値を求めよ.

(第 1 回北海道高校数学コンテスト)

$\sqrt[3]{49} = (\sqrt[3]{7})^2$  に着目する.

<sup>3</sup>大学の数学で習うオイラーの公式を用いれば, もっと簡潔に記される.



解答 2)  $x = \sqrt[3]{7}$  とおくと,

$$P = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

$x - 1 = \sqrt[3]{7} - 1 > 0$ ,  $x - 2 = \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{8} < 0$  より  $P < 0$ .

3)

$$\begin{aligned} P(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 4) &= \{(x - 1)(x^2 + x + 1)\}\{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)\} \\ &= (x^3 - 1)(x^3 - 8) = (7 - 1)(7 - 8) = -6. \\ (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 4) &= x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 6x + 4 \\ &= 7\sqrt[3]{7} + 3 \cdot 7 + 7\sqrt[3]{49} + 6\sqrt[3]{7} + 4 = 25 + 13\sqrt[3]{7} + 7\sqrt[3]{49} \end{aligned}$$

により,  $P$  に  $25 + 13\sqrt[3]{7} + 7\sqrt[3]{49}$  を掛けると  $-6$  になる.

(2015.3.9)

座標空間内に  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$ ,  $D(0, 0, 1)$ ,  $E(1, 0, 1)$ ,  $F(1, 1, 1)$ ,  $G(0, 1, 1)$  を頂点に持つ立方体を対角線  $OF$  を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

(10 京都・理甲)

回転体の体積を求めるには, 問題となっている物体を回転軸に垂直な平面で切ったときの断面を調べる. この問題の場合, 断面をすぐに思い浮かべにくい, まず平面が 3 点  $A, C, D$ , あるいは, 3 点  $E, B, G$  を通る場合を考え, そこから平面を点  $O$  または点  $F$  の方向へずらしていくと想像しやすいく.

解答 回転体を軸  $OF$  に垂直な平面  $x + y + z = t$  ( $0 < t < 3$ ) で切ったときの断面である円の半径を  $r(t)$  とすると, 回転体の体積は

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_0^3 r(t)^2 dt \quad (24)$$

である<sup>4</sup>. そこで, 立方体を平面  $x + y + z = t$  で切ったときの断面を調べる. なお, 断面は  $t = 1$  のとき正三角形  $ACD$ ,  $t = 2$  のとき正三角形  $EBG$  となり,  $0 < t \leq 1$ ,  $1 < t < 2$ ,  $2 \leq t < 3$  で様相が変わる.

- $0 < t \leq 1$  のとき, 断面は  $(t, 0, 0)$ ,  $(0, t, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  を 3 頂点とする正三角形である (図 15(a) 参照). 立方体を直線  $OF$  を軸に回転させると, この断面は点  $(t/3, t/3, t/3)$  を中心として回転するので,

$$r(t)^2 = \left(t - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{t}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}t^2$$

である.

<sup>4</sup> $\sqrt{3}$  で割るのは次の理由による:  $dt$  を  $t$  の微小変化として, 回転体のうち 2 平面  $x + y + z = t$ ,  $x + y + z = t + dt$  で挟まれた部分の厚さは

$$\frac{|t + dt|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} - \frac{|t|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{dt}{\sqrt{3}}$$

となるから.

2.  $1 < t < 2$  のとき, 断面は  $(1, t-1, 0), (t-1, 1, 0), (0, 1, t-1), (0, t-1, 1), (t-1, 0, 1), (1, 0, t-1)$  を 6 頂点とする六角形であるから (図 15(b) 参照),

$$r(t)^2 = \left(1 - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(t - 1 - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{t}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}t^2 - 2t + 2$$

である.

3.  $2 \leq t < 3$  の部分の回転体の体積は, 対称性により  $0 < t \leq 1$  の部分の回転体の体積に等しい. 参考までに, 立方体の平面  $x + y + z = t$  による断面は  $(t-2, 1, 1), (1, t-2, 1), (1, 1, t-2)$  を 3 頂点とする正三角形である (図 15(c) 参照).

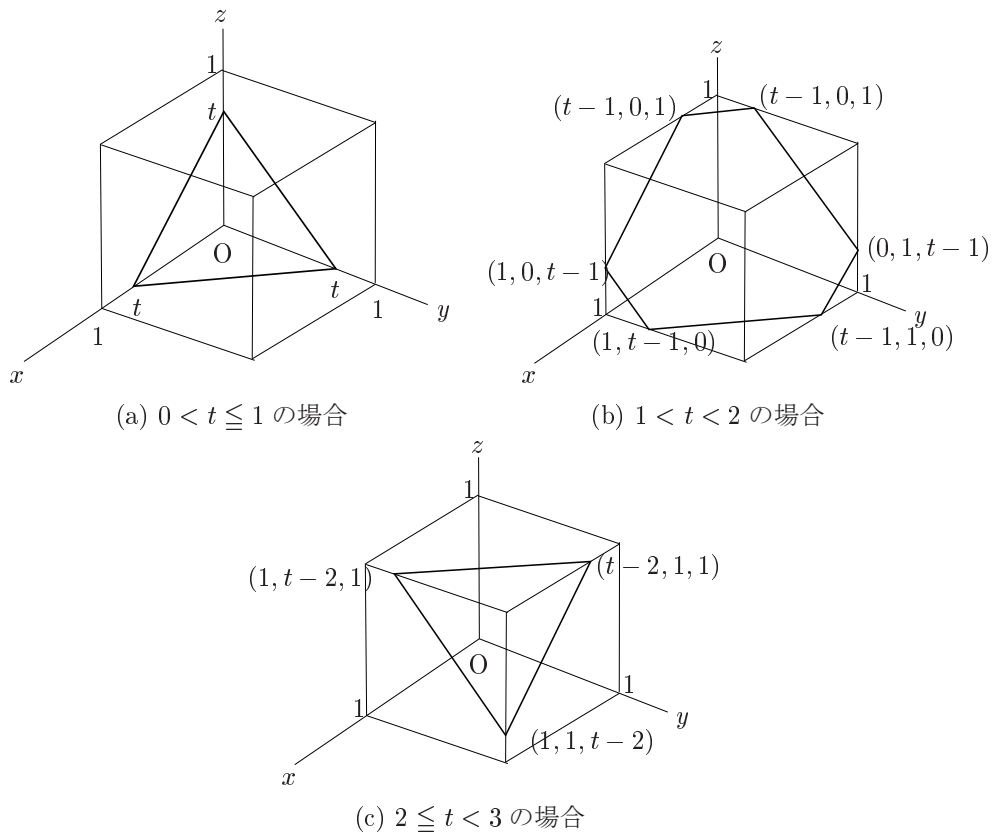


図 15: 立方体を回転軸に垂直な平面  $x + y + z = t$  で切ったときの断面.

以上の  $r(t)^2$  の式を (24) に代入して,

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left\{ 2 \times \int_0^1 \frac{2}{3} t^2 dt + \int_1^2 \left( \frac{2}{3} t^2 - 2t + 2 \right) dt \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

を得る.

(2015.3.8)

$AB = AC$ ,  $BC = 2$  の直角二等辺三角形  $ABC$  の各辺に接し、ひとつの軸が辺  $BC$  に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

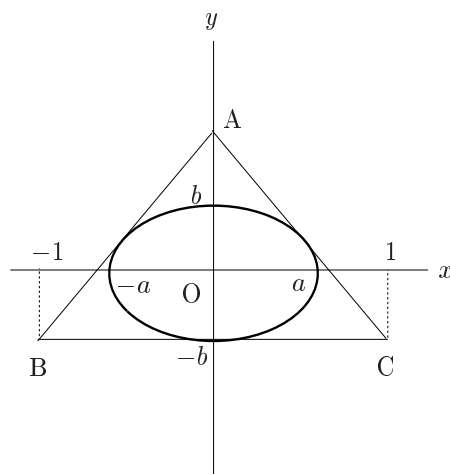
(00 東大理系)

素直に座標平面を使えば簡単に解ける。

**解答** 下の図のように  $(x, y)$  座標を取る。原点  $O$  は楕円の中心に一致するとして、楕円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

とする。



楕円と辺  $AC$  との接点を  $(x_0, y_0)$  とすると、接線（辺  $AC$ ）の方程式は

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

である。この接線の傾きは  $-1$  であるから、

$$\frac{x_0}{a^2} : \frac{y_0}{b^2} = 1 : 1, \quad \text{よって, } x_0 = pa^2, \quad y_0 = pb^2 \quad (p > 0)$$

とおける。点  $(x_0, y_0)$  が楕円上にあるから、

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = p^2(a^2 + b^2) = 1, \quad \therefore p = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

が得られ、接線（辺  $AB$ ）の方程式は

$$x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$$

となることがわかる。この直線は点  $C(1, -b)$  を通るから、

$$1 - b = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \therefore b = \frac{1 - a^2}{2}.$$

よって、楕円の面積は

$$\pi ab = \frac{\pi}{2} a(1 - a^2).$$

これを  $(\pi/2)S(a)$  とおいて、 $S'(a)$  を計算して  $S(a)$  の  $0 < a < 1$  における増減を調べることにより、 $S(a)$  は  $a = 1/\sqrt{3}$  のとき最大値を取ることがわかる。よって、楕円の面積の最大値は

$$\frac{\pi}{2}S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(2015.3.8)

$a$  は定数.  $x^{151}$  を  $x^5 - a$  で割った余りを求めよ.

(09 慶應)

$x^{151} = x(x^5)^{30}$  と表せることに着目する.

**解答**  $y = x^5$  と置くと  $x^{151} = xy^{30}$ .  $f(y) = y^{30}$  を  $y - a$  で割った余りは因数定理により  $f(a) = a^{30}$  であるから、

$$\begin{aligned} y^{30} &= (y - a)g(y) + a^{30}, & g(y) \text{ は多項式,} \\ x^{150} &= (x^5 - a)g(x^5) + a^{30}, \\ x^{151} &= (x^5 - a) \cdot xg(x^5) + a^{30}x. \end{aligned}$$

ゆえに、求める余りは  $a^{30}x$  である.

(2015.3.8)

$a > 0, b > 0, c > 0$  で  $a^2 + b^2 = c^2$  のとき、1)  $a + b > c$ , 2)  $a^5 + b^5 < c^5$  を示せ.

(第2回北海道高校数学コンテスト)

$a, b$  の対称式が現れるので、ひたすら  $a + b, ab$  で表すと道が見えてくる.

**解答** 1) これは教科書レベル.  $a + b > 0, c > 0$  であるから  $(a + b)^2 > c^2$  を示せばよい.

$$(a + b)^2 - c^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - c^2 = 2ab > 0.$$

2) 公式  $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$  を用いると、

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &= (a + b)^5 - 5(a^4b + 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + ab^4) \\ &= (a + b)^5 - 5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) \\ &= (a + b)^5 - 5ab\{(a + b)^3 - ab(a + b)\} \\ &= (a + b)\{(a + b)^4 - 5ab(a + b)^2 + 5(ab)^2\} \end{aligned}$$

を得る. ここで、

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$$

であるから、

$$a^5 + b^5 = (a + b)\{(c^2 + 2ab)^2 - 5ab(c^2 + 2ab) + 5(ab)^2\}$$

$$= (a+b)\{c^4 - abc^2 - (ab)^2\}$$

となり,

$$\begin{aligned} c^5 - (a^5 + b^5) &= c^5 - (a+b)c^4 + ab(a+b)c^2 + (ab)^2(a+b) \\ &\quad (\text{前問より } a+b > c \text{ であるから}) \\ &> c^5 - (a+b)c^4 + abc^3 + (ab)^2(a+b) \\ &= c^3(c-a)(c-b) + (ab)^2(a+b). \end{aligned}$$

$c > a, c > b$  より (右辺)  $> 2(ab)^2(a+b) > 0$  であるから, 題意の不等式が示された.

(2015.3.8)

$\frac{100\ 100\ 100\ 100\ 100\ 1}{10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 1}$  を約分せよ.

(set\_ryu 様)

分子  $= 10^{15} + 10^{12} + \dots + 10^3 + 1$  などと表せることに着目する.

解答  $x = 10$  とおくと,

$$\begin{aligned} (\text{題意の分数}) &= \frac{x^{15} + x^{12} + \dots + x^3 + 1}{x^{16} + x^{14} + \dots + x^2 + 1} \\ &= \frac{x^{18} - 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^{18} - 1} \\ &= \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \\ &= \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}. \end{aligned}$$

$x = 10$  を代入して,

$$(\text{題意の分数}) = \frac{11}{111}.$$

(2015.3.8)

$n$  が 3 以上の整数のとき  $x^n + 2y^n = 4z^n$  を満たす整数  $x, y, z$  は  $x = y = z = 0$  以外に存在しないことを証明せよ.

(00 千葉大)

$\sqrt{2}$  が無理数であることの証明と雰囲気は似ている.

解答  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  で題意の等式を満たすものが存在するとして, 矛盾を導く.  $x, y, z$  の最大公約数は 1 と仮定してよい.  $x^n = 4z^n - 2y^n$  より  $x^n$  は偶数であるから,  $x$  自体も偶数である.  $x = 2k$  ( $k$  は整数) とおくと

$$2^n k^n + 2y^n = 4z^n, \quad y^n = 2(z^n - 2^{n-2}k^n).$$

$n \geq 3$  より  $n-2$  は整数であることに注意すれば、 $y^n$  は偶数であることがわかり、よって  $y$  自体も偶数である。 $y = 2l$  ( $l$  は整数) とおくと、

$$2^n k^n + 2^{n+1} l^n = 4z^n, \quad z^n = 2^{n-2}(k^n + 2l^n).$$

$n-2$  は整数であることに注意すれば、 $z^n$  は偶数であることがわかり、よって  $z$  自体も偶数である。

こうして、 $x, y, z$  はみな偶数であることになるが、これは  $x, y, z$  の最大公約数が 1 であることに矛盾する。

(2015.3.8)

二次方程式  $x^2 + 3x + 8 = 0$  の解を  $\alpha, \beta$  とするとき、 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, \alpha^4 + 21\beta^3$  の値を求めよ。

(05 学習院・経)

前者は  $\alpha, \beta$  の対称式であるから、 $\alpha + \beta, \alpha\beta$  で表せば答えがわかる。しかし、後者は  $\alpha, \beta$  の対称式でないから、その方法は直接には使えない。そこで、 $\alpha, \beta$  が  $x^2 + 3x + 8 = 0$  の解であることを利用する。

**解答** 解と係数の関係より  $\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 8$  であるから、

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = (-3)^2 - 8 = 1.$$

次に、 $\alpha, \beta$  が  $x^2 + 3x + 8 = 0$  の解であることから  $\alpha^2 + 3\alpha + 8 = 0, \beta^2 + 3\beta + 8 = 0$  であるので、

$$\alpha^4 = (\alpha^2)^2 = (-3\alpha - 8)^2 = 9\alpha^2 + 48\alpha + 64 = 9(-3\alpha - 8) + 48\alpha + 64 = 21\alpha - 8,$$

$$\beta^3 = \beta\beta^2 = \beta(-3\beta - 8) = -3\beta^2 - 8\beta = -3(-3\beta - 8) - 8\beta = \beta + 24,$$

ゆえに、

$$\alpha^4 + 21\beta^3 = (21\alpha - 8) + 21(\beta + 24) = 21(\alpha + \beta) + 496 = 21(-3) + 496 = 433.$$

(2015.3.8)